مجموعه آموزشی

معادلات دیفرانسیل

با تأکید بر حل مسأله

همراه با ۳۴۰ مثال حل شده امتحانی

قابل استفاده برای دانشجویان رشته های مهندسی و علوم پایه

مؤلف: مهندس حسن پور

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

فصل اول : معادلات دیفرانسیل و مفاهیم اولیه

فصل دوم : حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

فصل سوم : معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

فصل چهارم : حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها

فصل پنجم : تبدیل لاپلاس

فصل ششم : دستگاه های معادلات دیفرانسیل

فصل اول : معادلات دیفرانسیل و مفاهیم اولیه

۱-۱- مفاهیم اصلی

تعریف معادله دیفرانسیل : معادله دیفرانسیل، معادله ای برحسب یک تابع مجهول و مشتقات آن است

$$\left(f\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0\right)$$

برای مثال :

$$y'=0 \qquad y'=x\sin x \qquad y''+y'=\sin x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}-3\frac{dz}{dt}=t-1$$ (مشتق z نسبت به t)

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-6y=x^2$$ (مشتق y نسبت به x)

تعریف : اگر در معادله دیفرانسیل مشتق گیری برحسب یک متغیر مستقل باشد آن را معادله دیفرانسیل معمولی (عادی) و اگر مشتق گیری برحسب دو یا چند متغیر مستقل باشد،آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامیم. معادلات دیفرانسیل معمولی را ODE (Ordinary Differential Equation) و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را PDE (Partial Differential Equation) می نامیم.

$$y'+y=e^x \qquad (ODE)$$

$$u_{xx}+u_{yy}=x \qquad (PDE)$$

۱-۱-۱- مرتبه معادله دیفرانسیل :

بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را گویند.

$y'+y=\sin x$ مرتبه اول

$yy'+\cos y=\sin x$ مرتبه اول

$(y'')^5+y''-y=\sin x$ معادله مرتبه دوم

$y^{(5)}-y''-x\sin y=0$ معادله مرتبه پنجم

۱-۱-۲- درجه معادله دیفرانسیل :

هرگاه معادله دیفرانسیل را بتوان برحسب مشتقات بصورت یک چند جمله ای نوشت، آنگاه بالاترین توان مشتق را در درجه معادله دیفرانسیل گویند.

$(y')^3+3xyy'=\sin x$ مرتبه ۱ – درجه ۳

$y''+3(y')^2+y=e^x$ مرتبه ۲ – درجه ۱

$$(y''')^2+(y'')^5+\frac{y}{x+1}=e^{-x}$$ مرتبه ۳ – درجه ۲

نکته : در صورتی که معادله دارای توان کسری باشد پس از آن که توان کسری متغیرهای موجود حذف شدند، درجه یک معادله دیفرانسیل تعیین می شود.

$$\sqrt[3]{(y'')^2}=\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{توان } 6} (y'')^4=\left(1+(y')^2\right)^3$$

مرتبه ۲ ، درجه ۴

نکته : معادله دیفرانسیل می تواند بدون درجه نیز باشد مانند :

$$\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}+x-2$$

تعریف : هر معادله بصورت

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

را معادله دیفرانسیل خطی می گوییم، در این نوع معادلات ضرایب متغیر وابسته و مشتقات تنها تابعی از x است و توان مشتقات و خود متغیر وابسته برابر یک است. معادله ای که خطی نباشد را غیر خطی می نامند.

$6y''+3y'=y$ (با ضرایب ثابت) معادله خطی

$(x-1)y'+2y=\sin x$ (با ضرایب غیر ثابت) معادله خطی

$yy''+y'=0$ معادله غیر خطی

$xy''+y^2=x$ معادله غیر خطی

۱-۱-۲-۱- تمرین : مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید.

1) $y^{(4)}-y=\tan x$

2) $y^{(3)}=\sqrt{y'}$

3) $y''+ty'-\sin\sqrt{y}=t-1$

4) $\sqrt{y''}=3y'+x$

۱-۱-۳- جواب معادله دیفرانسیل

تعریف : $y=f(x)$ را جواب معادله دیفرانسیل $f\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$ می گوییم، هرگاه در معادله صدق کند.

مثال (۱) آیا $y=e^{-2x}$ یک جواب معادله $y''+y'-2y=0$ است ؟

$$y=e^{-2x} \to y'=-2e^{-2x} \to y''=4e^{-2x}$$

جایگذاری در معادله $\to 4e^{-2x}-2e^{-2x}-2e^{-2x}=0 \to 0=0$

صدق کرد پس جواب است.

مثال (۲) نشان دهید $y = x$ جوابی از معادله $x^2y'' + xy' - y = 0$ است.

$$y = x \;\rightarrow\; y' = 1 \;\rightarrow\; y'' = 0$$

صدق در معادله $\rightarrow\; x^2(0) + x(1) - (x) = 0 \;\rightarrow\; 0 = 0$

۱-۱-۳-۱- تمرین : نشان دهید که جواب های داده شده در معادله دیفرانسیل صدق می کنند.

1) $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = 0 \qquad , \quad y = ax^2 + bx$

2) $y + y^3 + y^3y' = 0 \qquad , \quad x + y = \tan^{-1}(y)$

3) $x\,dx - y^2dy = 0 \qquad , \quad y^3 = \dfrac{3}{2}x^2 + 3c$

4) $(y\cos y - \sin y + x)y' = y \qquad , \quad y + \sin x = x$

از حساب دیفرانسیل و انتگرال می دانیم که هرگاه $y' = f(x)$ ، آنگاه هر یک از توابع $y = \int f(x)dx + 1$ و $y = \int f(x)dx + 2$ و ... به طور کلی $y = \int f(x)dx + c$ جواب معادله اند که به آن جواب عمومی می گوییم. پس یک معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب و حتی بی نهایت جواب داشته باشد. در حالت کلی جواب معادله دیفرانسیل را می توانیم به سه دسته جواب عمومی، جواب خصوصی، جواب غیر عادی تقسیم بندی کنیم.

جواب عمومی : هرگاه جواب معادله دیفرانسیل توسط رابطه ای با ثابت های دلخواه بیان شود، را گویند.

جواب خصوصی : جوابی را که از جواب عمومی با محاسبه پارامتر دلخواه تحت شرایط داده شده به دست می آید را گویند. (جواب خصوصی جوابی است بدون پارامتر c).

جواب غیر عادی (منفرد) : جوابی که تحت هیچ شرایط اولیه ای، از جواب عمومی حاصل نشود، و منحنی آن بر تمام منحنی های جواب عمومی مماس باشد را گوییم.

توجه : اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی شامل n ثابت دلخواه خواهد بود.

مثال (۳) هر یک از توابع $y = x^2 + 3x + 1$ ، $y = x^2 + 3x + 6$ و $y = x^2 + 3x - 3$ جوابی از معادله دیفرانسیل $y' = 2x + 3$ می باشند.

به طورکلی $y = x^2 + 3x + c$ (c ثابت دلخواه) را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می نامیم.

حال اگر جواب عمومی معادله از نقطه $(0,2)$ عبور کند یعنی $y(0) = 2$ خواهیم داشت :

$$2 = 0^2 + 3(0) + c \;\rightarrow\; c = 2$$

حال باجایگذاری $c = 2$ در جواب عمومی , جواب خصوصی حاصل می شود.

$y = x^2 + 3x + 2$ (جواب خصوصی)

مثال (۴) در معادله دیفرانسیل $y' = 2\sqrt{y}$ که جواب عمومی آن به فرم $\sqrt{y} = x + c$ است جواب $y = 0$ (که جوابی از معادله است) از جواب عمومی به دست نمی آید، لذا $y = 0$ جواب غیر عادی معادله می باشد.

۱-۲- تشکیل معادله دیفرانسیل

فرض می کنیم جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل داده شده باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل متناظر با آن را بیابیم. از آنجایی که تعداد پارامترهای جواب عمومی با مرتبه معادله برابر است، کافی است به تعداد پارامترهای آن از جواب عمومی مشتق بگیریم و سپس پارامترها را بین جواب داده شده و مشتقات آن حذف می کنیم.

مثال (۵) معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را تشکیل دهید.

$$1)\ x^2 - y^2 = c^2 \rightarrow 2x - 2yy' = 0 \rightarrow x = yy'$$

$$2)\ y = \frac{1+cx}{1-cx} \rightarrow y - cxy = 1 + cx \rightarrow y - 1 = c(1+y)x \rightarrow c = \frac{y-1}{x(1+y)}$$

$$y' = \frac{c(1-cx) + c(1+cx)}{(1-cx)^2}$$

$$\rightarrow y' = \frac{2c}{(1-cx)^2} \rightarrow$$ مقدار c را قرار می دهیم

$$\rightarrow y' = \frac{2\frac{y-1}{x(1+y)}}{\left(1 - \frac{y-1}{x(1+y)}x\right)^2} \rightarrow y' = \frac{\frac{2(y-1)}{x(1+y)}}{\left(\frac{1+y-y+1}{1+y}\right)^2}$$

$$\rightarrow y' = \frac{\frac{2(y-1)}{x(1+y)}}{\frac{4}{(1+y)^2}} \rightarrow y' = \frac{y^2-1}{2x}$$ معادله دیفرانسیل

$$3)\ y = ce^{-x^2} \rightarrow c = \frac{y}{e^{-x^2}} \rightarrow y' = -2xce^{-x^2}$$

مقدار c را قرار می دهیم $\rightarrow y' = -2x\frac{y}{e^{-x^2}}e^{-x^2} \rightarrow y' = -2xy$

$$4)\ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \rightarrow \begin{cases} y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} & (1) \\ y' = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x} & (2) \\ y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x} & (3) \end{cases}$$

ابتدا از رابطه (۲) و (۳) c_1 و c_2 را یافته و در رابطه (۱) قرار می دهیم تا معادله دیفرانسیل حاصل شود.

رابطه (۲) را در عدد ۳ ضرب کرده و با رابطه (۳) جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 3y' = 6c_1e^{2x} - 9c_2e^{-3x} \\ y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} y'' + 3y' = 10c_1e^{2x}$$

$$c_1 = \frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}} \xrightarrow{\text{قرار در رابطه 2}} y' = 2\left(\frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}}\right)e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

$$\rightarrow \quad y' = \frac{1}{5}y'' + \frac{3}{5}y' - 3c_2e^{-3x} \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{y'' - 2y'}{15e^{-3x}}$$

c_1 و c_2 را در رابطه (۱) قرار می دهیم :

$$y = \frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}}e^{2x} + \frac{y'' - 2y'}{15e^{-3x}}e^{-3x}$$

$$y = \frac{y'' + 3y'}{10} + \frac{y'' - 2y'}{15} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3y'' + 9y' + 2y'' - 4y'}{30}$$

$$5y'' + 5y' - 30y = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y'' + y' - 6y = 0}}$$

$$5) \ y = c_1 \sin bx + c_2 \cos bx \xrightarrow{(1)} y' = c_1 b \cos bx - c_2 b \sin bx$$

$$\rightarrow \quad y'' = -c_1b^2 \sin bx - c_2b^2 \cos bx$$

$$\rightarrow \quad y'' = -b^2(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx) \quad \rightarrow \quad \frac{y''}{-b^2} = c_1 \sin bx + c_2 \cos bx \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{y''}{-b^2} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y'' + b^2y = 0}}$$

$$6) \ y = c_1x + c_2x^2 \quad (1) \quad \rightarrow \quad y' = c_1 + 2c_2x \quad \rightarrow \quad y'' = 2c_2 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{y''}{2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y' = c_1 + 2c_2x \\ c_2 = \dfrac{y''}{2} \end{cases} \rightarrow \quad c_1 = y' - xy'' \qquad (3)$$

رابطه (۲) و (۳) را در رابطه (۱) قرار می دهیم.

$$y = (y' - xy'')x + \left(\frac{y''}{2}\right)x^2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x^2y'' - 2xy' + 2y = 0}}$$

مثال (۶) معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب عمومی آن خانواده خطوط راستی باشد که بر دایره $x^2 + y^2 = c^2$ مماس باشد.

حل : ابتدا از طریق دایره شیب خط های مماس را می یابیم.

$$x^2+y^2=c^2 \rightarrow 2x+2yy'=0 \rightarrow y'=\frac{-x}{y} \quad (\text{شیب})$$

$$(\text{خط راست})\quad y=mx+b \rightarrow y=-\frac{x}{y}(x)+b \rightarrow y=\frac{-x^2}{y}+b$$

از معادله خط مماس مشتق می گیریم :

$$\rightarrow y'=\frac{-2xy+x^2y'}{y^2} \rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

مثال (۷) معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که تحت این شرایط که جواب آن خانواده دوایری باشد که از مبدا عبور کنند و مرکز آنها روی خط $y=x$ قرار داشته باشد.

$$\text{مرکز دایره}=(c,c) \qquad \text{شعاع دایره}=\sqrt{2}\,c$$

$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2 \longrightarrow x^2+y^2=2c(x+y) \quad (1)$$

$$\text{مشتق} \rightarrow 2x+2yy'=2c(1+y') \quad (2)$$

از رابطه (۱) c را یافته در رابطه (۲) قرار می دهیم.

$$\text{از رابطه (۱)} \rightarrow c=\frac{x^2+y^2}{2(x+y)}= \xrightarrow{\text{جاي گذاري در 2}} 2x+2yy'=2\frac{x^2+y^2}{2(x+y)}(1+y')$$

$$\rightarrow 2x+2yy'=\frac{x^2+y^2}{x+y}(1+y')$$

۱-۲-۱- تمرین :

۱- معادله دیفرانسیل همه دوایری که مرکز آنها روی محور x ها باشد را بیابید.

۲- معادله دیفرانسیل همه دوایری در صفحه به شعاع ۱ (راهنمایی از فرمول کاپا استفاده کنید).

۳- معادله دیفرانسیل همه سهمی هایی که محور آنها محور x ها و فاصله راس تا کانون برابر a باشد.

۴- معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=\ln[\cos(x-c_1)]+c_2$ را بیابید.

۵- معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب عمومی آن خانواده دایره هایی به مرکز (c_1,c_2) و شعاع معین (r) باشد.

۶- معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را بیابید.

1) $y=\dfrac{c}{1+cx}$

2) $y=\ln(x^2+3c)$

3) $y=ce^{cx}$

4) $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}$

5) $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$

۷- معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را بیابید.

1) $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$

2) $y=c_1e^{c_2x}$

3) $y=c_1+c_2x^2+c_3x^3$

4) $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$

۸- معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب آن خانواده خطوط راستی باشد که عرض از مبدا آنها تابعی از شیب آن خطوط باشند.

۹- معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب عمومی آن خطوط، خطوط راستی باشد که بر سهمی $y^2=2x$ مماس باشد.

۱۰- به ازای چه مقداری از a ، $y=e^{ax}$ جوابی از معادله زیر است.

$$y''-y'-2y=0$$

۱۱- به ازای چه مقداری از m ، $y=x^m$ جوابی از معادله زیر است :

$$x^2y''-3xy'+3y=0$$

فصل ۲ : حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در معادله $f\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0$ هرگاه $n=1$ باشد به آن معادله دیفرانسیل مرتبه اول گویند و با $y'=f(x,y)$ یا $f(x,y,y')=0$ یا $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ نمایش می دهند. در حالت کلی تمام معادلات مرتبه اول قابل حل نیستند اما برخی از آنها قابل حل اند که در این فصل به حل آنها می پردازیم.

۲-۱- معادلات دیفرانسیل جدا شدنی (تفکیک پذیر):

هر گاه بتوانیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بصورت $f(x)dx=f(y)dy$ در آوریم به آن معادله دیفرانسیل جدا شدنی گوییم (یعنی xها یک طرف تساوی و y ها طرف دیگر تساوی)، برای حل این معادله کافیست از طرفین معادله انتگرال بگیریم تا جواب عمومی آن حاصل شود.

نکته : هر گاه بتوانیم به کمک فاکتورگیری، اتحادها، تجزیه و ... توابع برحسب x و توابع برحسب y را بصورت ضربی دربیاوریم و تفکیک کنیم معادله از نوع جدایی پذیر است.

مثال (۱) جواب خصوصی معادله $y'=2(x+1)y$ و $y(0)=e$ را بیابید.

$$\frac{dy}{dx}=2(x+1)y \rightarrow \frac{dy}{y}=2(x+1)dx \xrightarrow{\int}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2(x+1)dx \rightarrow \ln|y|=x^2+2x+c \rightarrow \text{جواب عمومی}$$

$$\text{حال}\quad y(0)=e \rightarrow \ln e=0+2(0)+c \rightarrow c=1$$

$$\ln|y|=x^2+2x+1 \rightarrow \ln|y|=(x+1)^2 \rightarrow y=e^{(x+1)^2}$$

مثال (۲) جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$1)\ (1-x)dy+(2-y)dx=0 \rightarrow \text{جدایی پذیر}$$

$$(1-x)dy=-(2-y)dx \rightarrow \int\frac{dy}{2-y}=\int-\frac{dx}{1-x}$$

$$\rightarrow -\ln|2-y|=\ln|1-x|+\ln c \rightarrow \ln(2-y)^{-1}=\ln c(1-x) \rightarrow \frac{1}{2-y}=c(1-x)$$

$$2)\ (1-x^2)(1-y)dx=xy(1+y)dy \rightarrow \text{جدایی پذیر}$$

$$\rightarrow \int\frac{(1-x^2)dx}{x}=\int\frac{y(1+y)}{1-y}dy \xrightarrow{\text{تقسیم}} \int\frac{dx}{x}-\int x\,dx=\int(-y-2+\frac{2}{1-y})dy$$

$$\rightarrow \ln x-\frac{x^2}{2}+c=-\frac{y^2}{2}-2y-2\ln|1-y|$$

$$3)\ y'=1+x^2+y^2+y^2x^2 \rightarrow y'=(1+x^2)+y^2(1+x^2)$$

$$\rightarrow y'=(1+x^2)(1+y^2)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=(1+x^2)(1+y^2) \rightarrow$$ جدایی پذیر

$$\rightarrow \int\frac{dy}{1+y^2}=\int(1+x^2)dx \rightarrow \tan^{-1}y=x+\frac{x^3}{3}+c$$

4) $y'=e^{2x-3y} \quad , \quad y(0)=0$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{2x}e^{-3y} \rightarrow$$ جدایی پذیر

$$\int e^{3y}dy=\int e^{2x}dx \rightarrow \frac{1}{3}e^{3y}=\frac{1}{2}e^{2x}+c \xrightarrow{y(0)=0}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=c \rightarrow c=-\frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{3}e^{3y}=\frac{1}{2}e^{2y}-\frac{1}{6}$$ جواب خصوصی

5) $y'=e^{x+y}+x^2e^{x^3+y}$

$$\rightarrow y'=e^xe^y+x^2e^{x^3}e^y=e^y\left(e^x+x^2e^{x^3}\right)$$ جدایی پذیر

$$\frac{dy}{e^y}=\left(e^x+x^2e^{x^3}\right)dx \rightarrow \int e^{-y}dy=\int e^xdx+\int x^2e^{x^3}dx \rightarrow -e^{-y}=e^x+\frac{1}{3}e^{x^3}+c$$

6) $\sec^2x\tan y\,dx+\sec^2y\tan x\,dy=0$

$$\sec^2x\tan y\,dx=-\sec^2y\tan x\,dy$$ جدایی پذیر

$$\int\frac{\sec^2x}{\tan x}dx=\int\frac{-\sec^2y}{\tan y}dy \rightarrow \ln|\tan x|+\ln c=-\ln|\tan y|$$

$$\rightarrow \ln|c(\tan x)|=\ln\left|\frac{1}{\tan y}\right| \rightarrow c\tan x=\frac{1}{\tan y}$$

7) $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}+\frac{e^yx}{1+x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx}=e^xe^y+e^y\frac{x}{1+x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=e^xe^y+e^y\frac{x}{1+x^2}=e^y\left(e^x+\frac{x}{1+x^2}\right)$$ جدایی پذیر

$$\frac{dy}{e^y}=\left(e^x+\frac{x}{1+x^2}\right)dx \xrightarrow{\int} -e^{-y}=e^x+\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+c$$

8) $e^{y^2}(x^4+2x^2+1)=-(x^2y+y)y'$

$$\rightarrow e^{y^2}(x^2+1)^2=-y(x^2+1)\frac{dy}{dx}$$ جدایی پذیر

$$\to \int (x^2+1)dx = -\int e^{-y^2} y\,dy \to \frac{x^3}{3}+x+c=\frac{1}{2}e^{-y^2}$$

9) $\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)=3x+2y+4$

$$\to \frac{dy}{dx}=e^{3x+2y+4} \to \frac{dy}{dx}=e^{3x}e^{2y}e^4$$ جدایی پذیر

$$\to \int e^{-2y}dy=\int e^{3x}e^4dx \to -\frac{1}{2}e^{-2y}=\frac{1}{3}e^4e^{3x}+c$$

10) $y'=\sqrt{y+\sin x}-\cos x \to y+\sin x=z$

$$\to y'+\cos x=z' \quad (*)$$

$$y'+\cos x=\sqrt{y+\sin x} \xrightarrow{*} z'=\sqrt{z} \to \frac{dz}{dx}=\sqrt{z}$$

$$\to \int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int dx \to 2\sqrt{z}=x+c \to 2\sqrt{y+\sin x}=x+c$$

۲-۱-۱- تمرین : جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

1) $\frac{dy}{dx}=e^{3x-y}+x^2e^{-y}$

2) $2xyy'=1+y^2$

3) $y'=x-1+y^2x-y^2$

4) $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$

5) $e^{y^3}(x^2+2x+1)=-(xy^2+y^2)y'$

6) $y'=3x^2e^{3y-x^3}$

7) $x\sin y\,dx+(x^2+1)\cos y\,dy=0$

8) $4x\,dy-y\,dx=x^2dy$

9) $y'=\sqrt{xy+x+y+1}$

10) $(y-xy')=y^2+y'$

11) $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^ydy)-(1+y)dy=0$

12) $y'+2x=2(x^2+y-1)^{3/2}$

13) $y'y^{-1}=x\ln(y^{2x})+8x^2$

14) $2y^2y'=e^{2x-2y+1}$

15) $(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$

16) $e^{x-y}\sec y=y'$

معادلات قابل تبدیل به جدایی پذیر:

۲-۲- معادله به فرم یک خط $y'=f(ax+by+c)$

نکته : ($ax+by+c$ یک خط)

طریقه حل :

$$ax+by+c=z \to a+by'=z' \to y'=\frac{z'-a}{b}$$

با اعمال این تغییر متغیر، معادله به فرم یک خط تبدیل به معادله جدایی پذیر می شود.

مثال (۳) معادلات زیر را حل کنید.

1) $y' = \sin^2(x-y+1)$

$\rightarrow \quad x-y+1=z \quad \rightarrow \quad 1-y'=z' \quad \rightarrow \quad y'=1-z'$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow \quad 1-z'=\sin^2 z \quad \rightarrow$ جدایی پذیر

$1-\sin^2 z = z' \quad \rightarrow \quad \cos^2 z = \dfrac{dz}{dx}$

$\int dx = \int \sec^2 z\, dz \quad \rightarrow \quad x+c=\tan z \quad \rightarrow \quad x+c=\tan(x-y+1)$

2) $y'\ln(x-y) = 1+\ln(x-y)$

$\rightarrow \quad x-y=z \quad \rightarrow \quad 1-y'=z' \quad \rightarrow \quad y'=1-z'$

$(1-z')\ln z = 1+\ln z \quad \rightarrow \quad \ln z - z'\ln z = 1+\ln z \quad \rightarrow \quad -\dfrac{dz}{dx}\ln z = 1 \quad \rightarrow \quad \int \ln z\, dz = \int -dx$

$\rightarrow \quad z\ln z - z = -x+c \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad (x-y)\ln(x-y)-(x-y) = -x+c$

$\rightarrow \quad (x-y)\ln(x-y)+y=c$

3) $y' = (4x+y+1)^2$

$4x+y+1=z \quad \rightarrow \quad 4+y'=z' \quad \rightarrow \quad y'=z'-4$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow \quad z'-4=z^2 \quad \rightarrow \quad z'=z^2+4$

$\int \dfrac{dz}{z^2+4} = \int dx \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{z}{2} = x+c \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{4x+y+1}{2} = x+c$

4) $(1+y')e^x = e^y$

$\rightarrow \quad 1+y' = e^{y-x} \quad \rightarrow \quad y' = e^{y-x}-1 \quad \rightarrow \quad y-x=z$

$\rightarrow \quad y'-1=z' \quad \rightarrow \quad y'=z'+1$ با جایگذاری در معادله داریم :

$\rightarrow \quad z'+1=e^z-1 \quad \rightarrow \quad z'=e^z-2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx}=e^z-2$

$\int \dfrac{dz}{e^z-2} = \int dx \quad \rightarrow \quad \int \dfrac{dz}{e^z-2}\times\dfrac{e^{-z}}{e^{-z}} = \int dx \quad \rightarrow \quad \int \dfrac{e^{-z}dz}{1-2e^{-z}} = \int dx$

$\rightarrow \quad 1-2e^{-z}=t \quad \rightarrow \quad 2e^{-z}dz=dt$

$$\to\ e^{-z}dz=\frac{dt}{2}\ \to\ \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\int dx\ \to\ \frac{1}{2}\ln|t|=x+c$$

$$\to\ \frac{1}{2}\ln\left|1-2e^{-z}\right|=x+c\ \to\ \frac{1}{2}\ln\left|1-2e^{-(y-x)}\right|=x+c$$

5) $\cot(x+y)dx=xdx+xdy$

معادله $\xrightarrow{\div dx}$ $\cot(x+y)=x+xy'\ \to$

$x+y=z\ \to\ 1+y'=z'\ \to\ y'=z'-1$

$$\to\ \cot z=x+x(z'-1)\ \to\ \cot z=xz'\ \to\ \cot z=x\frac{dz}{dx}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\tan z\,dz\ \to\ \ln x+\ln c=-\ln(\cos z)\ \to\ \ln cx=\ln\sec z\ \to\ xc=\sec(x+y)$$

6) $y'=1+x^2-2xy+y^2$

$y'=1+(x-y)^2\ \to\ x-y=z\ \to\ 1-y'=z'\ \to\ y'=1-z'$

با جایگذاری در معادله داریم $\to\ 1-z'=1+z^2\ \to\ -\frac{dz}{dx}=z^2$

$$\int-\frac{dz}{z^2}=\int dx\ \to\ \frac{1}{z}=x+c\ \to\ \frac{1}{x-y}=x+c\ \to\ 1=(x+c)(x-y)$$

۲-۲-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'=1+\frac{1}{\sin(x-y+4)}$

2) $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$

3) $y'=\cos(x-y)$

4) $\cos(x+y)y'=1$

5) $y'=-2(2x+3y)^2$

6) $y'=\sin^2(x-2y)$

7) $\tan^2(x+y)dx-dy=0$

8) $y'-(x+y)^2=4(x+y)+1$

9) $y'=1+\csc(x-y+1)$

10) $y'\sec(x-y)=\frac{1}{\cos(x-y)}+1$

۲-۳- معادلات همگن :

تعریف : تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم اگر برای هر $\lambda>0$ داشته باشیم

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

مثال (۴) آیا توابع زیر همگن هستند ؟

1) $f(x,y)=xy+\sqrt{x^3y}\to f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)+\sqrt{(\lambda x)^3(\lambda y)}$

$\rightarrow\ f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 xy+\lambda^2\sqrt{x^3 y}=\lambda^2 f(x,y)$ همگن از درجه ۲

$2)\ f(x,y)=\ln\frac{x-y}{x+y}\ \rightarrow\ f(\lambda x,\lambda y)=\ln\frac{\lambda x-\lambda y}{\lambda x+\lambda y}$

$\rightarrow\ \ln\frac{\lambda x-\lambda y}{\lambda x+\lambda y}=\ln\frac{x-y}{x+y}=\lambda^{\circ} f(x,y)$ همگن از درجه ۰

$3)\ f(x,y)=\cos xy^2\ \rightarrow\ f(\lambda x,\lambda y)=\cos(\lambda x\lambda^2 y^2)$

$\rightarrow\ \cos(\lambda^3 xy^2)\neq\lambda^3\cos(xy^2)$ همگن نیست

تعریف : معادله دیفرانسیل $M\,dx+N\,dy=0$ را همگن گوییم اگر توابع M و N همگن باشند.

نکته : هر معادله به فرم $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ همگن است.

روش حل معادلات همگن : هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول همگن با تغییر متغیر $z=\frac{y}{x}$ تبدیل به یک معادله جدایی پذیر می شود (۱۰۰٪).

$$z=\frac{y}{x}\ \rightarrow\ y=xz\ \begin{cases} dy=x\,dz+z\,dx\\ \quad\text{or}\\ y'=z+z'x\end{cases}$$

مثال (۵) معادلات زیر را حل کنید.

$1)\ y'=\frac{y}{x}+\cot\frac{y}{x}\ \rightarrow\ \frac{y}{x}=z\ \rightarrow\ y=xz\ \rightarrow\ y'=z+z'x$

با جایگذاری در معادله داریم $z+z'x=z+\cot z\rightarrow\frac{dz}{dx}x=\cot z\rightarrow\int\tan z\,dz=\int\frac{dx}{x}$

$-\ln\cos z=\ln x+\ln c\ \rightarrow\ \sec z=xc\ \rightarrow\ xc=\sec\left(\frac{y}{x}\right)$

$2)\ \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\right)dy=0$

$\frac{x}{y}=z\ \rightarrow\ x=yz\ \rightarrow\ dx=z\,dy+y\,dz\ \rightarrow$ با جای گذاری در معادله داریم

$(1+e^z)(z\,dy+y\,dz)+(e^z(1-z))dy=0\ \rightarrow$

$\rightarrow\ z\,dy+y\,dz+e^z z\,dy+e^z y\,dz+e^z dy-ze^z\,dy=0$

$dy(z+e^z)+dz(y+ye^z)=0$

$dy(z+e^z)+ydz(1+e^z)=0$ جدایی پذیر

$$dy(z+e^z)=-y(1+e^z)dz \rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{1+e^z}{z+e^z}dz$$

$$\rightarrow \ln y+\ln c=-\ln(z+e^z) \rightarrow yc=\frac{1}{z+e^z} \rightarrow yc=\frac{1}{\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}}}$$

3) $y'=\dfrac{x-y}{x+y} \xrightarrow{\text{همگن}}$

$$\rightarrow \frac{y}{x}=z \rightarrow y=xz \rightarrow y'=z+z'x$$

با جای گذاری در معادله داریم $\rightarrow z+z'x=\dfrac{x-xz}{x+xz} \rightarrow z+z'x=\dfrac{1-z}{1+z}$

$$\rightarrow z'x=\frac{1-z}{1+z}-z \rightarrow \frac{dz}{dx}x=\frac{1-z-z-z^2}{1+z} \rightarrow \int\frac{1+z}{1-2z-z^2}dz=\int\frac{dx}{x} \rightarrow$$

$$1-2z-z^2=t \rightarrow -2(1+z)dz=dt \rightarrow (1+z)dz=\frac{dt}{-2}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\int\frac{dx}{x} \rightarrow -\frac{1}{2}\ln t=\ln x+\ln c$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\ln(1-2z-z^2)=\ln x+\ln c \xrightarrow{z=\frac{y}{x}} xc=\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

4) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0 \xrightarrow{\text{همگن}}$

$$\rightarrow \frac{y}{x}=z \rightarrow y=xz \rightarrow dy=zdx+xdz$$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow (x-xz\cos z)dx+x\cos z(zdx+xdz)=0$

$$\rightarrow xdx-xz\cos zdx+xz\cos zdx+x^2\cos zdz=0$$

$\rightarrow xdx=-x^2\cos zdz$ جدایی پذیر

$$\rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int-\cos zdz \rightarrow \ln x=-\sin z+c \rightarrow \ln x=-\sin\frac{y}{x}+c$$

5) $xy'=y(\ln y-\ln x-1) \rightarrow xy'=y\left(\ln\dfrac{y}{x}-1\right)$ همگن

$\rightarrow \frac{y}{x}=z \rightarrow y=xz \rightarrow y'=z+z'x$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow x(z+z'x)=xz(\ln z-1) \rightarrow z+z'x=z\ln z-z$

$\rightarrow z'x=z\ln z-2z \rightarrow \frac{dz}{dx}x=z(\ln z-2)$

$\rightarrow \int\frac{dz}{z(\ln z-2)}=\int\frac{dx}{x} \rightarrow \ln(\ln z-2)=\ln x+\ln c \rightarrow \ln z-2=xc \rightarrow \ln\frac{y}{x}-2=xc$

6) $x\cos\frac{y}{x}y'=x\sin\frac{y}{x}+y\cos\frac{y}{x}$ همگن

$\rightarrow \frac{y}{x}=z \rightarrow y=xz \rightarrow y'=z+z'x$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow x\cos z(z+z'x)=x\sin z+xz\cos z \rightarrow$

$\rightarrow xz\cos z+x^2\cos z z'=x\sin z+xz\cos z$

$\rightarrow x^2\cos z z'=x\sin z \rightarrow x\cos z z'=\sin z$

$\rightarrow \int\frac{\cos z}{\sin z}dz=\int\frac{dx}{x} \rightarrow \ln|\sin z|=\ln x+\ln c \rightarrow \sin z=xc \rightarrow \sin\frac{y}{x}=xc$

۲-۳-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$

2) $(x^2-y^2)dy=2xydx$

3) $\left(x\cos\frac{y}{x}\right)(ydx+xdy)=\left(y\sin\frac{y}{x}\right)(xdy-ydx)$

4) $\left(x-y\tan\frac{y}{x}\right)dx+\left(x\tan\frac{y}{x}\right)dy=0 \qquad y(1)=0$

5) $\left(x\csc\frac{y}{x}-y\right)dx+xdy=0$

6) $(x^2y-2xy^2)dx=(x^3-3x^2y)dy$

7) $(x-y\ln y+y\ln x)dx+x(\ln y-\ln x)dy=0$

8) $y'=\frac{x-y}{x+3y}$

9) $xy'=y\cos\ln\frac{y}{x}$

10) $x\left(y'+e^{\frac{y}{x}}\right)=y$

11) $(y-xy')^2=x^2+y^2$

12) $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$

13) $x^2y'=3(x^2+y^2)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+xy$

۲-۴- معادلات به فرم دو خط $: y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

اگر $c_1 = c_2 = 0$ معادله خود همگن است. در غیر این صورت حاصل $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ را حساب می کنیم که دو حالت زیر پیش می آید.

حالت الف : اگر $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ آنگاه دو خط موازی اند و قرار می دهیم :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = z \;\rightarrow\; a_1 + b_1y' = z' \;\rightarrow\; y' = \dfrac{z' - a_1}{b_1} \\ \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_2}{a_1} = k \;\rightarrow\; a_2x + b_2y = kz \end{cases}$$

با اعمال تغییر این متغیر معادله دو خط تبدیل به معادله جدایی پذیر می شود.

حالت ب : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ دو خط متقاطع اند پس محل تلاقی دو خط را از حل دستگاه زیر پیدا می کنیم.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

پس $\begin{cases} x - x_0 = X \\ y - y_0 = Y \;\rightarrow\; y' = Y' \end{cases}$

با اعمال این تغییر متغیر معادله دو خط به معادله همگن تبدیل می شود. سپس با اعمال $z = \dfrac{Y}{X}$ آن را تبدیل به جدایی پذیر می کنیم و جواب معادله را بدست آورید.

نکته : برخی از معادلات دیفرانسیل ممکن است با تغییر متغیر $y = t^{\alpha} \;\rightarrow\; dy = \alpha t^{\alpha-1}dt$ به معادله همگن تبدیل شوند.

مثال (۶) معادلات زیر را حل کنید.

1) $y' = \dfrac{x - 3y + 3}{2x - 6y + 1}$

$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$ دو خط موازی اند. (حالت اول)

$$\begin{cases} x - 3y = z \;\rightarrow\; 1 - 3y' = z' \;\rightarrow\; y' = \dfrac{1 - z'}{3} \\ k = \dfrac{2}{1} = \dfrac{-6}{-3} = 2 \;\rightarrow\; 2x - 6y = 2z \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow \quad \frac{1-z'}{3}=\frac{z+3}{2z+1} \quad \rightarrow \quad 1-z'=\frac{3z+9}{2z+1}$

$$z'=1-\frac{3z+9}{2z+1}=\frac{2z+1-3z-9}{2z+1}=\frac{-z-8}{2z+1}$$

$\frac{dz}{dx}=-\frac{z+8}{2z+1}$ جدایی پذیر

$$\int\frac{2z+1}{z+8}dz=\int-dx \quad \rightarrow \quad \int\left(2-\frac{15}{z+8}\right)dz=-\int dx \quad \rightarrow \quad 2z-15\ln|z+8|=-x+c$$

$$\rightarrow \quad 2(x-3y)-15\ln|x-3y+8|=-x+c$$

---

2) $(x+y+1)^2dx+(2x+2y+1)dy=0 \xrightarrow{\div dx}$

$$y'=\frac{(x+y+1)^2}{-2x-2y-1}$$

$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=0$ دو خط موازی اند.

$$\begin{cases} x+y=z \quad \rightarrow \quad 1+y'=z' \quad \rightarrow \quad y'=z'-1 \\ k=-2 \quad \rightarrow \quad -2x-2y=-2z \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم

$$\rightarrow \quad z'-1=\frac{(z+1)^2}{-2z-1} \quad \rightarrow \quad z'=\frac{z^2+2z+1}{-2z-1}+1=\frac{z^2+2z+1-2z-1}{-2z-1}$$

$\rightarrow \quad z'=\frac{z^2}{-2z-1}$ جدایی پذیر

$$\int\frac{2z+1}{z^2}dz=\int-dx \quad \rightarrow \quad 2\ln|z|-\frac{1}{z}=-x+c$$

$$\rightarrow \quad 2\ln|x+y|-\frac{1}{x+y}=-x+c \quad \rightarrow \quad 2\ln|x+y|-\frac{1}{x+y}+x=c$$

---

3) $(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$

$\sin y=t \quad \rightarrow \quad \cos y\,dy=dt$

$\rightarrow \quad (x-2t+3)dx+(2x-4t-3)dt=0 \xrightarrow{\div dx}$

$$t' = \frac{-x+2t-3}{2x-4t-3}$$

$$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$ دو خط موازی اند.

$$\begin{cases} -x+2t = z \ \rightarrow \ -1+2t' = z' \ \rightarrow \ t' = \dfrac{z'+1}{2} \\ k=-2 \ \rightarrow \ 2x-4t = -2z \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow \ \dfrac{1+z'}{2} = \dfrac{z-3}{-2z-3} \ \rightarrow \ z' = \dfrac{2z-6}{-2z-3} - 1$

$$\rightarrow \ z' = \frac{2z-6+2z+3}{-2z-3} \ \rightarrow \ \frac{dz}{dx} = \frac{4z-3}{-2z-3} \ \rightarrow \ \int \frac{(2z+3)}{4z-3} dz = -\int dx$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{9}{2}}{4z-3} \right) dz = -\int dx \ \rightarrow \ \rightarrow \ \frac{1}{2} z + \frac{9}{2}\frac{1}{4} \ln|4z-3| = -x+c$$

$$\rightarrow \ \frac{1}{2}(-x+2t) + \frac{9}{8} \ln|4(-x+2t)-3| = -x+c$$

$$\rightarrow \ \frac{1}{2}(-x+2\sin y) + \frac{9}{8} \ln|-4x+8\sin y-3| + x = c$$

$$\longrightarrow \ 8\sin y + 4x + 9\ln|-4x+8\sin y-3| = c$$

---

4) $(2x-5y+3)dx - (2x+4y-6)dy = 0 \ \xrightarrow{\div dx}$

$$(2x-5y+3)\frac{dx}{dx} - (2x+4y-6)\frac{dy}{dx} = 0 \ \rightarrow \ y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$$

$$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x-5y+3=0 \\ 2x+4y-6=0 \end{cases} \quad \rightarrow$$ از حل دستگاه

$$\begin{cases} x=1 \quad \rightarrow \quad x-1 = X \\ y=1 \ \rightarrow \ y-1 = Y \ \rightarrow \ y' = Y' \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم $\rightarrow \quad Y'=\dfrac{2(X+1)-5(Y+1)+3}{2(X+1)+4(Y+1)-6}$

چون قرار است همگن شود باید اعداد ثابت حذف شوند.

$Y'=\dfrac{2X-5Y}{2X+4Y}$ همگن

$$z=\frac{Y}{X} \rightarrow Y=Xz \rightarrow Y'=z+z'X$$

$$\rightarrow z+z'X=\frac{2X-5Xz}{2X+4Xz} \rightarrow z'X=\frac{2-5z}{2+4z}-z$$

$$\frac{dz}{dX}X=\frac{2-5z-2z-4z^2}{2+4z} \rightarrow \int\frac{4z+2}{-4z^2-7z+2}dz=\int\frac{dX}{X} \rightarrow -\int\frac{4z+2}{4z^2+7z-2}dz=\int\frac{dX}{X}$$

$$\rightarrow 4z^2+7z+2=\left(2z-\frac{1}{2}\right)(2z+4)=(4z-1)(z+2)$$

با تجزیه کسر داریم :

$$\int\left(\frac{-\frac{4}{3}}{4z-1}+\frac{-\frac{2}{3}}{z+2}\right)dz=\int\frac{dX}{X} \rightarrow -\frac{1}{3}\ln|4z-1|-\frac{2}{3}\ln|z+2|=\ln X+\ln c$$

$$\rightarrow \ln\frac{1}{(4z-1)^{\frac{1}{3}}}+\ln\frac{1}{(z+2)^{\frac{2}{3}}}=\ln cX$$

$$\rightarrow \ln\frac{1}{(4z-1)^{\frac{1}{3}}(z+2)^{\frac{2}{3}}}=\ln cX \rightarrow cX=\frac{1}{(4z-1)^{\frac{1}{3}}(z+2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{Y}{X}=\frac{y-1}{x-1}} c(x-1)=\frac{1}{\left(4\left(\frac{y-1}{x-1}\right)-1\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{y-1}{x-1}+2\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$5)\ (y+2)dx=(x+y-1)dy \xrightarrow{\div dx} y'=\frac{y+2}{x+y-1}$$

$\rightarrow \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$ متقاطع اند

$$\begin{cases} y+2=0 \rightarrow y=-2 \rightarrow y+2=Y \rightarrow y'=Y' \\ x+y-1=0 \rightarrow x=3 \rightarrow x-3=X \end{cases} \rightarrow$$

$Y'=\dfrac{Y}{X+3+Y-2-1} \rightarrow Y'=\dfrac{Y}{X+Y}$ همگن $\quad \dfrac{Y}{X}=z \rightarrow Y=Xz$

$$\rightarrow\ Y'=z+z'X \xrightarrow[\text{همگن}]{\text{با جای گذاری در معادله}} z+z'X=\frac{Xz}{X+Xz} \rightarrow z'X=\frac{z}{1+z}-z$$

$$\frac{dz}{dX}X=\frac{z-z-z^2}{1+z} \rightarrow \int\frac{1+z}{-z^2}dz=\int\frac{dX}{X} \rightarrow \frac{1}{z}-\ln z=\ln X+c$$

$$\xrightarrow{z=\frac{Y}{X}=\frac{y+2}{x-3}} \frac{x-3}{y+2}-\ln\frac{y+2}{x-3}=\ln(x-3)+c$$

$$6)\ y'-\tan\frac{y-2x}{x+1}=\frac{y+2}{x+1} \xrightarrow[\text{تبدیل به دو می کنیم}]{\text{سه خط است}} y'-\tan\frac{y-2x}{x+1}=\frac{y-2x+2x+2}{x+1}$$

$$y'-\tan\frac{y-2x}{x+1}=\frac{y-2\cancel{x}}{x+1}+2 \quad * \quad \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{متقاطع اند}$$

$$\begin{cases} y-2x=0 \rightarrow y=-2 \rightarrow y+2=Y \rightarrow y'=Y' \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow x+1=X \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[*]{\text{با جای گذاری در معادله}} Y'-\tan\frac{Y-2-2(X-1)}{X}=\frac{Y-2-2(X-1)}{X}+2$$

$$Y'-\tan\frac{Y-2X}{X}=\frac{Y-2X}{X}+2 \xrightarrow{\text{همگن}} \frac{Y}{X}=z \rightarrow Y=Xz \rightarrow Y'=z+z'X$$

$$\rightarrow z+z'X-\tan\frac{Xz-2X}{X}=\frac{Xz-2X}{X}+2 \rightarrow z'X-\tan(z-2)=z-2+2-z$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dX}=\tan(z-2) \rightarrow \int\frac{\cos(z-2)}{\sin(z-2)}dz=\int\frac{dX}{X}$$

$$\rightarrow \ln|\sin(z-2)|=\ln X+\ln c \rightarrow \sin(z-2)=cX \rightarrow \sin\left(\frac{y+2}{x+1}-2\right)=c(x+1)$$

$$7)\ y\left(1+\sqrt{x^2y^4+1}\right)dx+2x\,dy=0 \quad (t^\alpha=y)$$

$$y=t^\alpha \rightarrow dy=\alpha t^{\alpha-1}dt \xrightarrow{\text{با جای گذاری در معادله}} t^\alpha\left(1+\sqrt{x^2t^{4\alpha}+1}\right)dx+2x\alpha t^{\alpha-1}dt=0$$

$$\left(t^\alpha+t^\alpha\sqrt{x^2t^{4\alpha}+1}\right)dx+2x\alpha t^{\alpha-1}dt=0$$

شرط همگن بودن را برقرار می کنیم. باید M و N هم درجه شوند.

$$\begin{cases} 2+4\alpha=0 \rightarrow \alpha=-\frac{1}{2} \\ \alpha=\alpha-1+1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\alpha=-\frac{1}{2}} \left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x^2t^{-2}+1}\right)dx - xt^{-\frac{3}{2}}dt=0 \xrightarrow{\div t^{-\frac{1}{2}}dt}$$

$$\rightarrow \left(1+\sqrt{x^2t^{-2}+1}\right)-xt^{-1}t'=0$$ همگن

$$\frac{t}{x}=z \rightarrow t=xz \rightarrow t'=z+z'x \rightarrow \left(1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2z^2}+1}\right)-x\frac{1}{xz}(z+z'x)=0$$

$$\rightarrow \left(1+\sqrt{\frac{1+z^2}{z^2}}\right)-\frac{1}{z}(z+z'x)=0$$

$$\left(1+\sqrt{\frac{1+z^2}{z^2}}\right)-1+\frac{z'x}{z}=0 \rightarrow$$ جدایی پذیر $$\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}=\frac{x\,dz}{z\,dx}$$

$$\rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\rightarrow \ln x=\sinh^{-1}z+c \rightarrow \ln x=\sinh^{-1}\frac{t}{x}+c \xrightarrow{t^{\alpha}=y,\ \alpha=-\frac{1}{2}} \ln x=\sinh^{-1}\frac{1}{xy^2}+c$$

۲-۴-۱- تمرین : جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

1) $y'=\dfrac{x+y}{x-1}$

2) $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$

3) $y'=\dfrac{4x-y+7}{2x+y-1}$

4) $(2x^2+3y^2-7)x\,dx-(3x^2+2y^2-8)y\,dy=0 \quad \begin{cases}x^2=u\\ y^2=v\end{cases}$

5) $y'-\tan\dfrac{y-2x}{x+1}=\dfrac{y-2x}{x+1}$

6) $y'\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}-\ln\dfrac{y+x}{x+3}$

7) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0 \quad (y=t^{\alpha})$

8) $4xy^2dx+(3x^2y-1)dy=0$

9) $(y-x+1)dx+(x-y+5)dy=0$

10) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x-y-2}{x-2y-3}=0$

11) $y' = \ln(x+4) - \ln(x-2y)$

۲-۵- معادلات کامل :

می دانیم که تابع دو متغیره $f(x,y)$ دارای دیفرانسیل کامل $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ می باشد. حال اگر $f(x,y) = c$,آنگاه $df = 0$ لذا رابطه $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ بدست می آید. سپس با استفاده از این بحث معادلات دیفرانسیل کامل را توضیح می دهیم.

تعریف : معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل است، اگر تابعی مانند $f(x,y)$ وجود داشته باشد به طوری که $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ ، در این صورت $f(x,y) = c$ جواب معادله دیفرانسیل فوق است.

قضیه : اگر M و N دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند. در این صورت معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل است اگر و فقط اگر $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

روش حل معادله کامل : پس از تشخیص کامل بودن معادله برای یافتن جواب آن به طریق زیرعمل می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad (1) \xrightarrow{\int dx} f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \quad (3) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad (2) \end{cases}$$

از رابطه (۳) نسبت به y مشتق می گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) \qquad (4)$$

رابطه (۲) را با رابطه (۴) برابر قرار می دهیم.

از برقرای این تساوی $g'(y)$ حاصل می شود که با انتگرال گیری نسبت به y، $g(y)$ حاصل می شود. $g(y)$ حاصل شده را در رابطه (۳) قرار می دهیم. چون $f(x,y) = c$ جواب عمومی معادله کامل است.

مثال (۷) جواب عمومی معادلات کامل زیر را بیابید.

1) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x} \end{cases}$$ پس معادله کامل است

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x}+6x \quad (1) \xrightarrow{\int dx} f(x,y)=y\ln x+3x^2+g(y) \quad (3) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\ln x-2 \quad (2) \end{cases}$$

مشتق از رابطه (۳) نسبت به y $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\ln x+g'(y) \quad (4)$

رابطه (۲) = (۴) رابطه

$$\ln x-2=\ln x+g'(y) \rightarrow g'(y)=-2 \xrightarrow{\int dy} g(y)=-2y$$

جایگذاری در رابطه (۳) $f(x,y)=y\ln x+3x^2-2y=c$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=2ye^{xy^2}+y^2(2xy)e^{xy^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=2ye^{xy^2}+y^2(2xy)e^{xy^2} \end{cases}$$

پس کامل است

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=M=y^2e^{xy^2}+4x^3 \quad (1) \xrightarrow{\int dx} f(x,y)=y^2\dfrac{1}{y^2}e^{xy^2}+x^4+g(y) \quad (3) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=N=2xye^{xy^2}-3y^2 \quad (2) \end{cases}$$

مشتق از رابطه (۳) نسبت به y $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xye^{xy^2}+g'(y) \quad (4)$

رابطه (۲) = (۴) رابطه

$$2xye^{xy^2}-3y^2=2xye^{xy^2}+g'(y) \rightarrow g'(y)=-3y^2 \xrightarrow{\int dy} g(y)=-y^3$$

جایگذاری در رابطه (۳) $f(x,y)=e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

۲-۵-۱- تمرین :

1) $(\sin x\cos y+e^{2x})dx+(\cos x\sin y+\tan y)dy=0$

2) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(e^{\frac{x}{y}}-\dfrac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0$

3) $(2x+y\cos(xy))dx+x\cos(xy)dy=0$

4) $(2y-xe^{xy})dy-(2+ye^{xy})dx=0$

5) $(ye^x)dx+(e^x+2y)dy=0$

6) $y'=\dfrac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$

7) $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(e^{xy}x\cos 2x-3)dy=0$

8) $\left(\frac{2x}{y^3}\right)dx+\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)dy=0$

9) $(2x+y\cos(xy))dx+x\cos(xy)dy=0$

10) $\frac{dy}{dx}+\frac{y\cos x+\sin y+y}{\sin x+x\cos y+x}=0$

۲-۶- عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگرالی) :

فرض کنید معادله دیفرانسیل $M\,dx+N\,dy=0$ کامل نباشد $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\neq\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ در صورتی که تابعی مانند $\mu(x,y)$ وجود داشته باشد، که با ضرب آن در معادله دیفرانسیل، معادله $\mu M\,dx+\mu N\,dy=0$ کامل شود، یعنی $\left(\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\right)$ در این صورت تابع $\mu(x,y)$ راعامل انتگرال ساز می نامیم.

حالت اول : فرض می کنیم μ تابعی برحسب x باشد در این صورت داریم : $\frac{\partial M}{\partial y}=0$

اگر کامل نبود در μ ضرب می کنیم : $M\,dx+N\,dy=0\ \rightarrow$

$M\mu dx+N\mu dy=0$ کامل شد

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\ \rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial y}M=\frac{\partial N}{\partial x}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial x}N$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial\mu}{\partial y}=0}\ \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=N\frac{\partial \mu}{\partial x}\ \rightarrow$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx=\frac{\partial\mu}{\mu}\ \rightarrow\ \frac{\partial\mu}{\mu}=f(x)dx\ \xrightarrow{\int}\ \ln\mu=\int f(x)dx\ \rightarrow\ \mu=e^{\int f(x)dx}$$

نتیجه : در معادله ناکامل $M\,dx+N\,dy=0$ ، اگر $f(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ (تابعی از x) باشد، عامل انتگرال ساز به فرم $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$ خواهد بود.

حالت دوم : فرض می کنیم μ تابعی برحسب y باشد در این صورت داریم : $\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$

اگر کامل نبود در μ ضرب می کنیم. $M\,dx+N\,dy=0$

$M\mu dx+N\mu dy=0$ کامل شد.

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\ \rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial y}M=\frac{\partial N}{\partial x}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial x}N$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial\mu}{\partial x}=0} \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=-M\frac{\partial\mu}{\partial y} \rightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\partial y=\frac{\partial\mu}{\mu} \rightarrow \int\frac{\partial\mu}{\mu}=\int f(y)dy$$

$$\ln\mu=\int f(y)dy \rightarrow \mu=e^{\int f(y)dy}$$

نتیجه : در معادله ناکامل $M\,dx+N\,dy=0$ ، اگر $f(y)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ (تابعی از y) باشد، عامل انتگرال ساز به فرم $\mu(y)=e^{\int f(y)dy}$ خواهد بود.

حالت سوم : فرض می کنیم μ تابعی برحسب z باشد که $z=z(x,y)$ در این صورت داریم :

$$M\,dx+N\,dy=0$$

اگر کامل نبود در μ ضرب می کنیم.

$$M\mu\,dx+N\mu\,dy=0$$ کامل شد.

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\mu+\frac{\partial\mu}{\partial y}M=\frac{\partial N}{\partial x}\mu+\frac{\partial\mu}{\partial x}N$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial\mu}{\partial y}\neq0,\ \frac{\partial\mu}{\partial x}\neq0} \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{\partial\mu}{\partial x}N-M\frac{\partial\mu}{\partial y} \rightarrow$$

از قاعده زنجیره ای داریم :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}N-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}M \rightarrow \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{\partial\mu}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial x}N-\frac{\partial z}{\partial y}M\right]$$

$$\frac{\partial\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\left[\frac{\partial z}{\partial x}N-\frac{\partial z}{\partial y}M\right]}\partial z \rightarrow \int\frac{\partial\mu}{\mu}=\int f(z)dz \rightarrow \mu=e^{\int f(z)dz}$$

نتیجه : در معادله ناکامل $M\,dx+N\,dy=0$، اگر $f(z)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}N-\dfrac{\partial z}{\partial y}M\right]}$ باشد عامل انتگرال ساز بصورت $\mu(z)=e^{\int f(z)dz}$ خواهد بود.

نکته : اگر عامل انتگرال ساز برحسب $z=z(x,y)$ باشد برای اثبات شرایط عامل انتگرال ساز کافیست اثبات حالت سوم را انجام دهیم (بدون در نظر گرفتن z خاصی) در آخر کافیست $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ را در فرمول $f(z)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}N-\dfrac{\partial z}{\partial y}M\right]}$ جایگذاری کنیم.

نکته : بعضی از معادلات غیر کامل دارای فاکتور انتگرال ساز به صورت $\mu(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ می باشند. در این حالت کافیست معادله را در μ ضرب کنیم و با برقراری شرط کامل بودن α و β را بدست آوریم , سپس معادله را حل می کنیم.

روش حل معادله ناکامل پس از پیدا کردن عامل انتگرال ساز : پس از یافتن عامل انتگرال ساز معادله را در آن ضرب می کنیم تا به معادله کامل تبدیل شود و سپس آن را حل می کنیم.

مثال (۸) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(4xy+3y^2-x)dx+(x^2+2xy)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x+6y \quad و \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x+2y$$ کامل نیست

$$f(?)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\text{ or }(-M)}=\frac{4x+6y-2x-2y}{N}=\frac{2x+4y}{x(x+2y)}=\frac{2}{x}$$

$$f(x)=\frac{2}{x}\ \rightarrow\ \mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2$$

معادله ناکامل را در μ ضرب می کنیم.

$$(4x^3y+3y^2x^2-x^3)dx+(x^4+2x^3y)dy=0$$ کامل شد.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3+6yx^2 \quad و \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x^3+6x^2y$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=M=4x^3y+3y^2x^2-x^3 \quad (1) \xrightarrow{\int dx} f(x,y)=x^4y+y^2x^3-\dfrac{x^4}{4}+g(y)\,(3) \xrightarrow{\text{مشتق}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x^4+2yx^3+g'(y) \quad (4) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=N=x^4+2x^3y \quad (2)\end{cases}$$

$$(2)=(4) \rightarrow x^4+2x^3y=x^4+2yx^3+g'(y)$$

$$\rightarrow g'(y)=0 \xrightarrow{\int dy} g(y)=c$$

$$\rightarrow f(x,y)=x^4y+y^2x^3-\frac{x^4}{4}=c$$

مثال (۹) معادله دیفرانسیل $ydx+\left(2xy-e^{-2y}\right)dy=0$ را حل نمایید.

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=1$ و $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2y$ کامل نیست

$$f(?)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N \text{ or } (-M)}=\frac{1-2y}{(-M)}=\frac{1-2y}{-y}=\frac{-1}{y}+2 \rightarrow f(y)=-\frac{1}{y}+2$$

$$\mu(y)=e^{\int\left(-\frac{1}{y}+2\right)dy}=e^{-\ln y+2y}=e^{2y}e^{\ln y^{-1}}=\frac{1}{y}e^{2y}$$

معادله ناکامل $\times\mu \rightarrow y\dfrac{1}{y}e^{2y}dx+\dfrac{1}{y}e^{2y}\left(2xy-e^{-2y}\right)dy=0$

$\rightarrow e^{2y}dx+\left(2xe^{2y}-\dfrac{1}{y}\right)dy=0$ کامل شد.

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2e^{2y}$ و $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2e^{2y}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=M=e^{2y} \quad (1) \xrightarrow{\int dx} f(x,y)=xe^{2y}+g(y) \quad (3) \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \dfrac{\partial F}{\partial y}=2xe^{2y}+g'(y) \quad (4) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=N=2xe^{2y}-\dfrac{1}{y} \quad (2)\end{cases}$$

$$(2)=(4) \rightarrow 2xe^{2y}-\frac{1}{y}=2xe^{2y}+g'(y)$$

$$\rightarrow g(y)=\int-\frac{1}{y}dy \rightarrow g(y)=-\ln y \rightarrow f(x,y)=xe^{2y}-\ln y=c$$

مثال (۱۰) الف : تحت چه شرایطی معادله $M\,dx+N\,dy=0$ عامل انتگرال سازی برحسب $z=xy^2$ دارد.

ب : با توجه به الف معادله $(xy-2y^2)\,dx+(3xy-x^2)\,dy=0$ را حل کنید.

حل : برای الف ابتدا حالت (۳) را اثبات می کنیم تا به $f(z)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}N-\dfrac{\partial z}{\partial y}M}$ برسیم. حال کافیست $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy$ را در $f(z)$ قرار دهیم.

$$f(z)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{y^2N-2xyM}$$ تحت این شرایط

ب)

$$f(z)=\frac{x-4y-(3y-2x)}{y^2(3xy-x^2)-(2xy)(xy-2y^2)}=\frac{3x-7y}{xy^2(7y-3x)}=-\frac{1}{xy^2}=-\frac{1}{z}$$

$$\mu(z)=e^{\int -\frac{1}{z}dz}=e^{-\ln z}=\frac{1}{z}=\frac{1}{xy^2}$$

معادله ناکامل $\times\mu \rightarrow \left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}\right)dx+\left(\dfrac{3}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$ کامل شد.

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=M=\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x} \quad (1)\xrightarrow{\int dx} f(x,y)=\dfrac{1}{y}x-2\ln x+g(y) \quad (3)\xrightarrow{\text{مشتق}}\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}+g'(y) \quad (4)\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}=N=\dfrac{3}{y}-\dfrac{x}{y^2} \quad (2)\end{cases}$$

$$(2)=(4) \rightarrow \frac{3}{y}-\frac{x}{y^2}=-\frac{x}{y^2}+g'(y) \rightarrow g(y)=3\ln y$$

$$f(x,y)=\frac{1}{y}x-2\ln x+3\ln y=c$$

مثال (۱۱) الف : تحت چه شرایطی معادله $M\,dx+N\,dy=0$ عامل انتگرال سازی برحسب تابع $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ دارد.

ب : سپس معادله $x\,dx+y\,dy+4y^3(x^2+y^2)\,dy=0$ را با توجه به قسمت الف حل کنید.

حل : برای الف ابتدا حالت (۳) را اثبات می کنیم تا به $f(z)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}N-\dfrac{\partial z}{\partial y}M}$ برسیم. حال کافیست $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$ را در $f(z)$ قرار دهیم.

$$f(z)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}N+\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}M}$$ تحت این شرایط

ب) $$x\,dx+(y+4y^3x^2+4y^5)\,dy=0$$

$N=y+4y^3x^2+4y^5$ و $M=x$

$$f(z)=\frac{0-(8xy^3)}{\dfrac{-2x(y+4y^3x^2+4y^5)+2xy}{(x^2+y^2)^2}}=\frac{-8xy^3(x^2+y^2)^2}{-2xy-8x^3y^3-8xy^5+2xy}$$

$$f(z)=\frac{-8xy^3(x^2+y^2)^2}{-8xy^3(x^2+y^2)}=x^2+y^2=\frac{1}{z}$$

$$\mu(z)=e^{\int\frac{1}{z}dz}=e^{\ln z}=z=\frac{1}{x^2+y^2}$$

معادله ناکامل $\times\mu$ $\rightarrow$ $\dfrac{x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{y+4y^3x^2+4y^5}{x^2+y^2}dy=0$ کامل شد

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=M=\dfrac{x}{x^2+y^2}\ (1)\xrightarrow{\int dx}f(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|+g(y)\ (3)\xrightarrow{\text{مشتق}}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}+g'(y)\quad (4)\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}=N=\dfrac{y+4y^3x^2+4y^5}{x^2+y^2}\quad (2)\end{cases}$$

$$(2)=(4)\ \rightarrow\ \frac{y}{x^2+y^2}+g'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{4y^3(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\rightarrow\ g'(y)=4y^3\ \xrightarrow{\int dy}\ g(y)=y^4$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|+y^4=c$$

مثال (۱۲) نشان دهید معادله زیر کامل نیست و یک فاکتور انتگرال ساز بصورت $z=xy$ دارد، جواب عمومی معادله را بیابید.

$$\left(y-\sin x\sin^2(xy)\right)dx+\left(x-\sin y\sin^2(xy)\right)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1-2x\ \sin x\sin(xy)\cos(xy)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=1-2y\ \sin y\cos(xy)\sin(xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$ کامل نیست

$$f(z)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}N-\frac{\partial z}{\partial y}M}$$

$$f(z)=\frac{1-2x\sin x\sin(xy)\cos(xy)-1+2y\sin y\cos(xy)\sin(xy)}{y\left(x-\sin y\sin^2(xy)\right)-x\left(y-\sin x\sin^2(xy)\right)}$$

$$f(z)=\frac{2\ \sin(xy)\cos(xy)[y\sin y-x\ \sin x]}{-\sin^2(xy)(y\sin y-x\sin x)}=\frac{-2\cos(xy)}{\sin(xy)}=-2\cot(xy)$$

$$f(z)=-2\cot(z)$$

$$\mu(z)=e^{\int -2\cot(z)\,dz}=e^{-2\ln|\sin z|}=e^{\ln(\sin z)^{-2}}=\frac{1}{\sin^2 z}=\frac{1}{\sin^2(xy)}$$

معادله ناکامل $\times\mu\ \rightarrow\ \left[\frac{y}{\sin^2(xy)}-\sin x\right]dx+\left(\frac{x}{\sin^2(xy)}-\sin y\right)dy=0$ کامل شد

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=M=\frac{y}{\sin^2(xy)}-\sin x\ (1)\xrightarrow{\int dx} f(x,y)=-\cot(xy)+\cos x+g(y)\ (3)\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{x}{\sin^2(xy)}+g'(y)\ (4)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=N=\frac{x}{\sin^2(xy)}-\sin y\quad(2)\end{cases}$$

$$(2)=(4)\ \rightarrow\ g'(y)=-\sin y\ \rightarrow$$

$$g(y)=\cos y\ \xrightarrow{\text{جای گذاری در رابطه3}}\ f(x,y)=-\cot(xy)+\cos x+\cos y=c$$

مثال (۱۳) نشان دهید معادله زیر کامل نیست و عامل انتگرال سازی برحسب $x^2+y^2=z$ دارد. سپس معادله را حل کنید.

$$\left(x^3+xy^2-y\right)dx+\left(y^3+x^2y+x\right)dy=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 1 \\ \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy + 1 \end{cases}$$ کامل نیست

$$f(z) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}N - \dfrac{\partial z}{\partial y}M} = \frac{2xy - 1 - (2xy + 1)}{2x\left(y^3 + x^2y + x\right) - 2y\left(x^3 + xy^2 - y\right)}$$

$$f(z) = \frac{-2}{2xy^3 + 2x^3y + 2x^2 - 2yx^3 - 2xy^3 + 2y^2}$$

$$f(z) = \frac{-2}{2(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{z}$$

$$\mu(z) = e^{\int f(z)\,dz} = e^{-\int \frac{1}{z}dz} = e^{-\ln z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

معادله ناکامل $\times\mu \rightarrow \left(\dfrac{x^3 + xy^2 - y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\dfrac{y^3 + x^2y + x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$ کامل شد

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{(2xy - 1)\left(x^2 + y^2\right) - 2y\left(x^3 + xy^2 - y\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(2xy + 1)\left(x^2 + y^2\right) - 2x\left(y^3 + x^2y + x\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M = \dfrac{x^3 + xy^2 - y}{x^2 + y^2} \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x\left(x^2 + y^2\right) - y}{x^2 + y^2} \rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x} = x - \dfrac{y}{x^2 + y^2} \quad (1) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = \dfrac{y^3 + x^2y + x}{x^2 + y^2} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{\int dx} f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \tan^{-1}\frac{x}{y} + g(y) \quad (3) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} + g'(y) \quad (4)$$

$$(2) = (4) \rightarrow \frac{y\left(y^2 + x^2\right) + x}{\left(y^2 + x^2\right)} = \frac{x}{y^2 + x^2} + g'(y) \rightarrow$$

$$y = g'(y) \xrightarrow{\int dy} g(y) = \frac{y^2}{2} \rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \tan^{-1}\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = c$$

مثال (۱۴) با پیدا کردن فاکتور انتگرال معادله زیر را حل کنید.

$$y\left(e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy\right)dx=\left[(x-y)e^{\frac{x}{y}}-x^2y\cos xy\right]dy$$

$$y\left(e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy\right)dx+\left[-(x-y)e^{\frac{x}{y}}+x^2y\cos xy\right]dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}+xy\cos xy+xy\cos xy-x^2y^2\sin(xy)$$

کامل نیست

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-e^{\frac{x}{y}}+\frac{y-x}{y}e^{\frac{x}{y}}+2xy\cos xy-x^2y^2\sin xy=-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}+2xy\cos xy-x^2y^2\sin xy$$

$$f(?)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{*}=\frac{e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy}{-y\left(e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy\right)}=-\frac{1}{y}=f(y)$$

* با توجه به صورت $(-M)$ یا (N)

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln y}=\frac{1}{y}$$

$$\text{معادله ناکامل}\times\mu\rightarrow\left(e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy\right)dx-\frac{1}{y}\left((x-y)e^{\frac{x}{y}}-x^2y\cos(xy)\right)dy=0$$

کامل شد.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+x\cos xy+x\cos xy-x^2y\sin xy=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+2x\cos xy-x^2y\sin xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}+\left(1-\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}+2x\cos xy-x^2y\sin xy=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+2x\cos xy-x^2y\sin xy$$

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=M=e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy\ (1)\xrightarrow{\int dx}f(x,y)=ye^{\frac{x}{y}}-\frac{1}{y}\cos xy+x\sin xy+\frac{1}{y}\cos xy+g(y)\ (3)\\[2ex]\frac{\partial F}{\partial y}=N=e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}+x^2\cos xy\quad(2)\end{cases}$$

مشتق از رابطه (۳) نسبت به y

$$\frac{\partial F}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y^2}\cos xy+\frac{x}{y}\sin xy+x^2\cos xy-\frac{1}{y^2}\cos xy-\frac{x}{y}\sin xy+g'(y)\quad(4)$$

$$(2)=(4)\ \rightarrow\ g'(y)=0\ \rightarrow\ g(y)=c$$

$$\xrightarrow{(3)}\ f(x,y)=ye^{\frac{x}{y}}-\frac{1}{y}\cos xy+x\sin xy+\frac{1}{y}\cos xy+c$$

مثال (۱۵) معادله زیر عامل انتگرال سازی بصورت $\mu=x^\alpha y^\beta$ دارد، α و β را یافته و سپس معادله را حل کنید.

$$x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$$

$$\rightarrow\ (4xy+3y^4)dx+(2x^2+5xy^3)dy=0$$ کامل نیست

معادله ناکامل $\times\mu$ $\rightarrow$ $(4x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+3x^\alpha y^{4+\beta})dx+(2x^{\alpha+2}y^\beta+5x^{\alpha+1}y^{\beta+3})dy=0$ کامل شد

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta+3(4+\beta)x^\alpha y^{3+\beta}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta+5(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+3}$$

$$\rightarrow\ \begin{cases}4(\beta+1)=2(\alpha+2)\\ 3(4+\beta)=5(\alpha+1)\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$$

α و β را در معادله کامل شده قرار می دهیم

معادله کامل شده $\rightarrow$ $(4x^3y^2+3x^2y^5)dx+(2x^4y^1+5x^3y^4)dy=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial y}=8x^3y+15x^2y^4\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=8x^3y+15x^2y^4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=4x^3y^2+3x^2y^5\quad(1)\xrightarrow{\int dx}f(x,y)=x^4y^2+x^3y^5+g(y)\,(3)\rightarrow\dfrac{\partial F}{\partial y}=2x^4y+5x^3y^4+g'(y)\,(4)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2x^4y+5x^3y^4\quad(2)\end{cases}$$

$$(2)=(4)\ \rightarrow\ 2x^4y+5x^3y^4=2x^4y+5x^3y^4+g'(y)$$

$$g'(y)=0\ \rightarrow\ g(y)=c_1$$

$$f(x,y)=x^4y^2+x^3y^5+c_1=c_2\ \rightarrow\ x^4y^2+x^3y^5=c$$

۲-۶-۱- تمرین :

۱) تحت چه شرایطی معادله $Mdx+Ndy=0$ عامل انتگرال سازی به صورت $\mu=\mu\left(\frac{y}{x^3}\right)$ دارد. سپس معادله $ydx+x(x^2y-1)dy=0$ را حل کنید.

۲) اگر عامل انتگرال ساز معادله $(x^2-y^2-y)dx-(x^2-y^2-x)dy=0$ به صورت تابعی از x^2-y^2 باشد، عامل انتگرال ساز را بیابید و سپس معادله را حل کنید.

۳) معادله دیفرانسیل $(y^2-x^2y^2)dx+(x^3y+2x^2+xy)dy=0$ عامل انتگرال سازی به صورت تابعی از $z=x^2y^3$ دارد ، عامل انتگرال ساز را بیابید و سپس معادله را حل کنید.

۴) نشان دهید $\mu=\sec^2(xy)$ عامل انتگرال ساز معادله زیر است. سپس آن را حل کنید.

$$((\sin xy)(\cos xy)+xy)dx+x^2dy=0$$

۵) معادله زیر عامل انتگرال سازی برحسب $z=xy$ دارد. عامل انتگرال ساز را یافته و معادله را حل کنید.

$$(y+x^4y^2)dx+xdy=0$$

۶) عامل انتگرال ساز معادلات زیر که برحسب x یا برحسب y اند را پیدا کنید و سپس معادله را حل کنید.

1) $y(1+xy)dx-xdy=0$

2) $y'=e^{2x}+y-1$

3) $(1-4y)dx+(2y+e^y+x)dy=0$

4) $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos y\,dy=0$

5) $e^x(1+x)dx+(xe^x-ye^y)dy=0$

۷) معادلات زیر عامل انتگرال سازی بصورت $\mu=x^\alpha y^\beta$ دارند. ابتدا عامل انتگرال ساز را بیابید سپس معادله را حل کنید.

1) $x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

2) $(5xy^2-4y\sin y)dx+(xy\cos y+3x\sin y-4x^2y)dy=0$

۸) نشان دهید معادله زیر دارای عامل انتگرال سازی برحسب $z=\frac{1}{xy^3}$ می باشد. سپس معادله را حل کنید.

$$x^2y^3dx+(x+xy^2)dy=0$$

۹) نشان دهید معادله زیر عامل انتگرال سازی برحسب $z=x^4+y$ دارد. سپس معادله را حل کنید.

$$(3x^4-y)dy+(4x^7-12x^3y-8x^3)dx=0$$

۲-۷- حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از دیفرانسیل کامل :

از آنجایی که دیفرانسیل کامل برخی توابع دو متغیره را می دانیم به راحتی با تبدیل کردن معادلات دیفرانسیل بصورت دیفرانسیل کامل یک تابع، می توانیم جواب را بیابیم.

1) $d\left(x^2+y^2\right)=2\left(x\,dx+y\,dy\right)$

2) $d(xy)=y\,dx+x\,dy$

3) $d\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$

4) $d\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$

5) $d\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$

6) $d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

7) $d\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)=\dfrac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$

8) $d(\ln(xy))=\dfrac{x\,dy+y\,dx}{xy}$

9) $d\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=2\dfrac{y\,dy+x\,dx}{x^2+y^2}$

مثال (۱۶) معادلات زیر را حل کنید.

1) $x\,dx+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0$

$$\to\ x\,dx+y\,dy=\sqrt{x^2+y^2}\,dy$$

$$\to\ \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=dy\ \to\ d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=dy\ \xrightarrow{\int}\ \underline{\underline{\sqrt{x^2+y^2}=y+c}}$$

2) $x\,dy-y\,dx=\left(x^2+y^2\right)dx$

$$\to\ \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=dx\ \xrightarrow{\times -1}\ \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=-dx$$

$$\to\ d\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right)=-dx\ \xrightarrow{\int}\ \underline{\underline{\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)=-x+c}}$$

3) $\left(x+2xy^2\right)dy+y\,dx=0$

$$\to\ x\,dy+y\,dx+2xy^2dy=0\ \xrightarrow{\div xy}\ \frac{x\,dy+y\,dx}{xy}+2y\,dy=0$$

$$\to\ d\ln(xy)=-2y\,dy\ \xrightarrow{\int}\ \underline{\underline{\ln(xy)=-y^2+c}}$$

4) $x\,dy+y\,dx+x^2y^4(x\,dy-y\,dx)=0$

$$\to\ x\,dy+y\,dx+x^4y^4\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0\ \to\ d(xy)+x^4y^4d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\to\ \frac{d(xy)}{(xy)^4}=-d\left(\frac{y}{x}\right)\ \xrightarrow{\int}\ \underline{\underline{-\frac{1}{3(xy)^3}=-\frac{y}{x}+c}}$$

5) $y(1+xy)dx+x(1-xy)dy=0$

$$\to \quad ydx+xdy+(xy^2dx-x^2y)dy=0 \xrightarrow{\div x^2y^2}$$

$$\to \quad \frac{d(xy)}{x^2y^2}+\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0 \xrightarrow{\int} -\frac{1}{xy}+\ln x-\ln y=c$$

۲-۷-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $x\,dy=y\,dx+xy^2dx$

2) $\left(x+3x^2\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-y\,dy=0$

3) $(y+3x^4)dx-x\,dy=0$

4) $x\,dx+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0$

۲-۸- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

معادله (الف) (برحسب y) : y وابسته – x مستقل $\qquad y'+p(x)y=q(x)$

معادله (ب) (برحسب x) : x وابسته – y مستقل $\qquad x'+p(y)x=q(y)$

در اینجا معادله برحسب y را در حالت کلی حل می کنیم. معادله برحسب x نیز مانند معادله برحسب y حل می شود. با این فرق که جایگاه x و y عوض می شوند.

$$y'+p(x)y=q(x) \quad\to\quad \frac{dy}{dx}+p(x)y-q(x)=0$$

$$dy+[p(x)y-q(x)]dx=0$$

این معادله کامل نیست.طرفین را درعامل انتگرال ساز ضرب می کنیم $(\mu(x))$

$$\mu(x)dy+\mu(x)[p(x)y-q(x)]dx=0$$ کامل شد.

(شرط کامل بودن) $\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x))=\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)(p(x)y-q(x))]dx \quad\to\quad \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x))=\mu(x)p(x)$

$$\to \frac{\partial\mu(x)}{\mu(x)}=p(x)dx \quad\to\quad \ln\mu(x)=\int p(x)dx \quad\to\quad \mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

پس $[y'+p(x)y]e^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx} \quad\to\quad \frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right]=q(x)e^{\int p(x)dx} \xrightarrow{\int dx}$

$$e^{\int p(x)dx}y=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c \quad\to$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right)$$ جواب معادله (الف)

همانند معادله (الف)برای معادله (ب) داریم :

جواب معادله (ب)
$$x=e^{-\int p(y)dy}\left(\int e^{\int p(y)dy}q(y)dy+c\right)$$

نکته : انتگرال گیری ها برحسب متغیر مستقل است.

مثال (۱۷) معادلات زیر را فقط تشخیص دهید .(نیازی به حل نیست)

1) $xy'-y=x^2 \xrightarrow{\div x} y'-\frac{1}{x}y=x$ خطی مرتبه اول (الف)

2) $y\,dx+(xy+x-1)dy \xrightarrow{\div dy} yx'+xy+x-1=0$

$yx'+x(y+1)=1 \xrightarrow{\div y} x'+\frac{y+1}{y}x=\frac{1}{y}$ خطی مرتبه اول (ب)

3) $xy'e^y+e^y=3x^2 \rightarrow \begin{cases} e^y=z \\ y'e^y=z' \end{cases}$

$\rightarrow xz'+z=3x^2 \rightarrow z'+\frac{1}{x}z=3x$ خطی مرتبه اول (الف)

4) $y'=y(e^x+\ln y) \xrightarrow{\div y} \frac{y'}{y}=e^x+\ln y \xrightarrow[\frac{y'}{y}=z']{\ln y=z}$

$z'=e^x+z \rightarrow z'-z=e^x$ خطی مرتبه اول (الف)

5) $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x} \xrightarrow[\frac{1}{y'}=x']{\text{معکوس}} x'=\frac{2y\ln y+y-x}{y} \rightarrow x'+\frac{1}{y}x=2\ln y+1$

6) $y'-\frac{1}{x+1}y\ln y=(x+1)y \xrightarrow{\div y} \frac{y'}{y}-\frac{1}{x+1}\ln y=(x+1)$

$\xrightarrow[\frac{y'}{y}=z']{\ln y=z} z'-\frac{1}{x+1}z=(x+1)$ خطی مرتبه اول (الف)

7) $y'=\frac{x(x^2+y^2-1)}{2y(x^2-1)} \xrightarrow[2yy'=z']{y^2=z} z'=\frac{x(x^2+z-1)}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1+z)}{x^2-1}$

$$z' = x + \frac{x}{x^2-1}z \;\rightarrow\; z' - \frac{x}{x^2-1}z = x$$ خطی مرتبه اول (الف)

مثال (۱۸) معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\; y' + (\tan x)y = \frac{1}{\cos x}$$

توجه : چون اولین مثال است هم با روند هم با فرمول حل می کنیم که نتایج یکسان است. اما معادلات بعد را با فرمول حل می کنیم.

$$\mu = e^{\int \tan x\, dx} = e^{-\ln \cos x} = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\mu \times \text{معادله}} [y' + y\tan x]\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

[(متغیر وابسته) × عامل انتگرال ساز] $\dfrac{d}{d(\text{متغیر مستقل})}$: فرمول کلی عبارت سمت چپ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos x}y\right] = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\int dx} \frac{y}{\cos x} = \tan x + c \xrightarrow{\times \cos x} y = \sin x + c\cos x$$

حل با فرمول

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right) \rightarrow y = e^{-\int \tan x\, dx}\left(\int \frac{1}{\cos x}e^{\int \tan x\, dx}dx + c\right) \rightarrow$$

$$y = e^{\ln \cos x}\left(\int \frac{1}{\cos x}e^{-\ln(\cos x)}dx + c\right) \rightarrow$$

$$y = \cos x\left(\int \sec^2 x\, dx + c\right) \rightarrow y = \cos x(\tan x + c) \rightarrow y = \sin x + c\cos x$$

$$2)\; y' = \frac{y}{x+y^3} \xrightarrow{\text{معکوس}} x' = \frac{x+y^3}{y} \rightarrow x' - \frac{1}{y}x = y^2$$ خطی مرتبه اول (ب)

$$x = e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2 e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy + c\right) \rightarrow x = e^{\ln y}\left(\int y^2 e^{\ln y^{-1}}dy + c\right)$$

$$\rightarrow x = y\left(\int y^2 \frac{1}{y}dy + c\right) \rightarrow x = y\left(\frac{y^2}{2} + c\right) \rightarrow x = \frac{y^3}{2} + cy$$

$$3)\; y' + \frac{2(y^2+1)}{x}\tan^{-1} y = \frac{2(y^2+1)}{x} \xrightarrow{\div (y^2+1)}$$

$$\frac{y'}{y^2+1} + \frac{2}{x}\tan^{-1} y = \frac{2}{x} \xrightarrow[\frac{y'}{y^2+1} = z']{\tan^{-1} y = z} z' + \frac{2}{x}z = \frac{2}{x}$$ خطی مرتبه اول

$$z=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{2}{x}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c\right)\to z=e^{-2\ln x}\left(\int\frac{2}{x}e^{2\ln x}dx+c\right)$$

$$z=\frac{1}{x^2}\left(\int 2x\,dx+c\right)\to z=\frac{1}{x^2}\left(x^2+c\right)\to \tan^{-1}y=1+\frac{c}{x^2}$$

4) $y'-2=2xe^{-y}\xrightarrow{xe^y} e^y y'-2e^y=2x$

$e^y=z\to y'e^y=z'\to z'-2z=2x$

$$z=e^{\int 2dx}\left(\int 2x\,e^{-\int 2dx}dx+c\right)\to z=e^{2x}\left(\int 2x\,e^{-2x}dx+c\right)$$

$$\to z=e^{2x}\left(-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+c\right)\to z=-x-\frac{1}{2}+ce^{2x}\to e^y=-x-\frac{1}{2}+ce^{2x}$$

5) $(1+y^2)dx=\left(\sqrt{1+y^2}\cos y-xy\right)dy\xrightarrow{\div dy}$

$(1+y^2)x'=\sqrt{1+y^2}\cos y-xy\xrightarrow{\div(1+y^2)}$

$$x'=\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{xy}{1+y^2}\to x'+\frac{y}{1+y^2}x=\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$$ خطی مرتبه اول (ب)

$$x=e^{-\int\frac{y}{1+y^2}dy}\left(\int\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}e^{\int\frac{y}{1+y^2}dy}dy+c\right)\to x=e^{-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)}\left(\int\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}e^{\frac{1}{2}\ln(1+y^2)}dy+c\right)\to$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left(\int\cos y\,dy+c\right)\to x=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}(\sin y+c)$$

6) $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}\xrightarrow{\text{معکوس}} x'=x\cos y+\sin 2y$

$x'-x(\cos y)=2\sin y\cos y$ خطی مرتبه اول (ب)

$$x=e^{\int\cos y\,dy}\left(\int 2\sin y\cos y\,e^{-\int\cos y\,dy}dy+c\right)\to$$

$$x=e^{\sin y}\left(\int 2\sin y\cos y\,e^{-\sin y}dy+c\right)\to \sin y=t\quad,\quad \cos y\,dy=dt$$

$$x=e^{\sin y}\left(2\int te^{-t}dt+c\right)\to x=e^{\sin y}\left(2\left(-te^{-t}-e^{-t}\right)+c\right)\to$$

$$x=e^{\sin y}\left(-2\sin y\,e^{-\sin y}-2e^{-\sin y}+c\right)$$

۲-۸-۱- تمرین :

(۱) معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'\tan x + y = \sec x \qquad y(1)=0$

2) $(y+3x^4)dx - x\,dy = 0$

3) $(e^y + x)y' = 1$

4) $y' = \dfrac{1}{y(1-x)}$

5) $-y'\sin y + 2\cos x\cos y = \sin^2 x\cos x$

6) $1-y^2 = y'\left(xy+\sqrt{1-y^2}\sin y\right)$

7) $y'+1 = 4e^{-y}\sin x$

8) $(1+y^2)dx = \left((1+y^2)\cos y - xy\right)dy$

9) $dx - (1+2x\tan y)dy = 0$

10) $(y - x + xy\cot x)dx + x\,dy = 0$

11) $y^2dx + (3xy-1)dy = 0 \qquad y(1)=1$

12) $x(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = y(1-x^2) + x^3\ln x$

13) $y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = 3x^2$

14) $y\ln y\,dx + (x-\ln y)dy = 0$

15) $(x\ln x)y' = x\ln x - y \qquad y(e)=1$

16) $ye^{-x^2}dx + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt + y\right)dy = 0 \qquad y(1)=1$

(۲) یکی از منحنی های معادله دیفرانسیل $y' + y\cot x = \cos 2x$ ، محور x ها را در نقطه ای به طول $\dfrac{\pi}{2}$ قطع می کند. این منحنی خط $x=\dfrac{\pi}{2}$ را با کدام عرض قطع می کند.

(۳) معادله $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$ را با $\tan\dfrac{y}{2} = z$ حل کنید.

معادلات قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه اول :

۲-۹- معادله برنولی :

$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (A) \qquad n\in R$ $\quad x$ مستقل و y وابسته

در حالتی که $n=0$ یا $n=+1$ باشد معادله برنولی تبدیل به معادله خطی مرتبه اول می شود.

$x' + p(y)x = q(y)x^n \quad (B) \quad n\in R$ $\quad y$ مستقل و x وابسته

طریق حل معادله برنولی :

ابتدا معادله (A) را حل می کنیم. حل معادله (B) همانند (A) است فقط جایگاه x و y عوض می شود.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \xrightarrow{\div y^n} y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

$$y^{1-n} = z \rightarrow (1-n)y'y^{-n} = z' \rightarrow y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$$

جایگذاری در معادله $\dfrac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x) \xrightarrow{\times(1-n)} z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$

این معادله یک معادله خطی مرتبه اول است :(z وابسته و x مستقل) و جوابش بصورت زیر است.

$$z=y^{1-n}=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int(1-n)q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx+c\right)$$

تذکر : در این معادله هم باید ضریب y' یا x' یک باشد و شامل سه جمله است.

مثال (۱۹) معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ y'+\frac{1}{x}y=x^2y^2 \rightarrow n=2 \quad (A)$$

$$\xrightarrow{\div y^2} y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=x^2 \rightarrow y^{-1}=z \rightarrow -y^{-2}y'=z'$$

$$\rightarrow y^{-2}y'=-z' \rightarrow -z'+\frac{1}{x}z=x^2 \xrightarrow{\times(-1)} z'-\frac{1}{x}z=-x^2$$

$$z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int -x^2e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c\right)$$ معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{\ln x}\left(\int -x^2e^{-\ln x}dx+c\right) \rightarrow z=x\left(\int -x^2\frac{1}{x}dx+c\right) \xrightarrow{z=y^{-1}} y^{-1}=x\left(-\frac{x^2}{2}+c\right)$$

$$2)\ \left(x\tan y-x^2\sec y\right)y'=-1 \xrightarrow{\div y'} x\tan y-x^2\sec y=-x'$$

$$\rightarrow x'+(\tan y)x=+x^2\sec y \quad (B)$$ معادله برنولی درجه ۲

$$\xrightarrow{\div x^2} x^{-2}x'+(\tan y)x^{-1}=\sec y$$

$$x^{-1}=z \rightarrow -x^{-2}x'=z' \rightarrow x^{-2}x'=-z' \rightarrow -z'+(\tan y)z=\sec y$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} z'-(\tan y)z=-\sec y$$ معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{\int\tan y\,dy}\left(\int -\sec y\,e^{\int-\tan y\,dy}dy+c\right) \rightarrow z=e^{-\ln\cos y}\left(\int -\sec y\,e^{\ln\cos y}dy+c\right)$$

$$\xrightarrow{z=x^{-1}} \frac{1}{x}=\frac{1}{\cos y}\left(\int -\sec y\cos y\,dy+c\right) \rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{\cos y}(-y+c)$$

$$3)\ xy'+y=2x^2yy'\ln y$$

$$y=y'\left(2x^2y\ln y-x\right) \rightarrow x'y=2x^2y\ln y-x \xrightarrow{\div y}$$

$$x'=2x^2\ln y-\frac{1}{y}x \rightarrow x'+\frac{1}{y}x=2(\ln y)x^2 \xrightarrow{\div x^2}$$

$$x^{-2}x'+\frac{1}{y}x^{-1}=2\ln y \rightarrow \begin{cases} x^{-1}=z \\ -x^{-2}x'=z' \end{cases} \rightarrow x^{-2}x'=-z'$$

$$-z'+\frac{1}{y}z=2\ln y \xrightarrow{\times(-1)} z'-\frac{1}{y}z=-2\ln y$$

معادله خطی مرتبه اول (z وابسته و y مستقل)

$$z=x^{-1}=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int e^{-\int\frac{1}{y}dy}(-2\ln y)dy+c\right) \rightarrow$$

$$x^{-1}=e^{\ln y}\left(\int e^{-\ln y}(-2\ln y)dy+c\right) \rightarrow \frac{1}{x}=y\left(-2\int\frac{1}{y}\ln y\,dy+c\right) \rightarrow \frac{1}{x}=-y\ln^2 y+cy$$

4) $xy'\left(x-1+xe^{y}\right)=1 \xrightarrow{\div y'} x^2-x+x^2e^{y}=x'$

$x^2\left(1+e^{y}\right)=x'+x \rightarrow (n=2)$ (B) برنولی

$$\xrightarrow{\div x^2} x^{-2}x'+x^{-1}=\left(1+e^{y}\right) \rightarrow x^{-1}=z \rightarrow -x^{-2}x'=z'$$

$$x^{-2}x'=-z' \rightarrow -z'+z=1+e^{y} \xrightarrow{\times(-1)} z'-z=-\left(1+e^{y}\right)$$

معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{\int dy}\left(\int-\left(1+e^{y}\right)e^{-\int dy}dy+c\right) \rightarrow z=e^{y}\left(\int-\left(1+e^{y}\right)e^{-y}dy+c\right) \xrightarrow{z=x^{-1}}$$

$$x^{-1}=e^{y}\left(+e^{-y}-y+c\right) \rightarrow x^{-1}=1-ye^{y}+ce^{y}$$

5) $y'=\dfrac{3x^2}{x^3+y+1} \xrightarrow{\text{معکوس}} x'=\dfrac{x^3+y+1}{3x^2} \rightarrow$

$$x'=\frac{x}{3}+\frac{y+1}{3}x^{-2} \rightarrow x'-\frac{1}{3}x=\frac{y+1}{3}x^{-2} \xrightarrow{\div x^{-2}} x^2x'-\frac{1}{3}x^3=\frac{y+1}{3} \rightarrow \begin{cases} x^3=z \\ 3x^2x'=z' \\ x^2x'=\dfrac{z'}{3} \end{cases}$$

$\dfrac{z'}{3}-\dfrac{1}{3}z=\dfrac{y+1}{3} \rightarrow z'-z=y+1$ معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{+\int dy}\left(\int(y+1)e^{-\int dy}dy+c\right) \rightarrow z=e^{y}\left(\int(y+1)e^{-y}+c\right)$$

$$\xrightarrow{z=x^3} x^3=e^{y}\left(-e^{-y}(y+1)-e^{-y}+c\right) \rightarrow x^3=-y-2+ce^{y}$$

6) $y\,dx + x(x^2y-1)dy = 0$

$$\xrightarrow{\div dy} yx' + x^3y - x = 0 \xrightarrow{\div y} x' - \frac{1}{y}x = -x^3$$

$$\xrightarrow{\div x^3} x^{-3}x' - \frac{1}{y}x^{-2} = -1 \rightarrow x^{-2} = z \rightarrow -2x^{-3}x' = z'$$

$$\rightarrow x^{-3}x' = \frac{z'}{-2} \rightarrow -\frac{z'}{2} - \frac{1}{y}z = -1 \xrightarrow{\times(-2)} z' + \frac{2}{y}z = 2$$

معادله خطی مرتبه اول (z وابسته و y مستقل)

$$z = e^{-\int \frac{2}{y}dy}\left(\int 2e^{\int \frac{2}{y}dy}\,dy + c\right) \rightarrow z = e^{-2\ln y}\left(\int 2e^{2\ln y}dy + c\right)$$

$$z = e^{\ln y^{-2}}\left(\int 2e^{\ln y^2}\,dy + c\right) \xrightarrow{z = x^{-2}} x^{-2} = \frac{1}{y^2}\left(\int 2y^2dy + c\right) \rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2}\left(2\frac{y^3}{3} + c\right)$$

7) $y'x^3\sin y + 2y = xy'$

$$2y = y'(x - x^3\sin y) \xrightarrow{\div y'} 2yx' = x - x^3\sin y \xrightarrow{\div 2y}$$

$$x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}x^3 \xrightarrow{\div x^3} x^{-3}x' - \frac{1}{2y}x^{-2} = \frac{-\sin y}{2y}$$

$$x^{-2} = z \rightarrow -2x^{-3}x' = z' \rightarrow x^{-3}x' = \frac{z'}{-2}$$

$$\rightarrow -\frac{z'}{2} - \frac{1}{2y}z = -\frac{\sin y}{2y} \xrightarrow{\times(-2)} z' + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}$$

$$z = e^{-\int \frac{1}{y}dy}\left(\int \frac{\sin y}{y}e^{\int \frac{1}{y}dy}\,dy + c\right) \rightarrow z = e^{-\ln y}\left(\int \frac{\sin y}{y}e^{\ln y}dy + c\right)$$ معادله خطی مرتبه اول

$$\rightarrow x^{-2} = \frac{1}{y}\left(\int \frac{1}{y}\sin y(y)dy + c\right) \rightarrow x^{-2} = \frac{1}{y}(-\cos y + c)$$

8) $y' + \sqrt{x}y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}$

$$y' + \sqrt{x}y = \frac{2}{3}\sqrt{x}y^{-\frac{1}{2}} \qquad (A)$$ معادله برنولی

$$\xrightarrow{\div y^{-\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}}y' + \sqrt{x}y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} \rightarrow y^{\frac{3}{2}} = z \rightarrow \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y' = z' \rightarrow y^{\frac{1}{2}}y' = \frac{2}{3}z'$$

$$\to \frac{2}{3}z'+\sqrt{x}z=\frac{2}{3}\sqrt{x} \xrightarrow{\times\frac{3}{2}} z'+\frac{3}{2}\sqrt{x}z=\sqrt{x}$$ خطی مرتبه اول

$$z=e^{-\frac{3}{2}\int\sqrt{x}dx}\left(\int\sqrt{x}\,e^{\int\frac{3}{2}\sqrt{x}dx}dx+c\right) \to z=e^{-x^{\frac{3}{2}}}\left(\int x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{3}{2}}}dx+c\right)$$

$$\xrightarrow{z=y^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{3}{2}}=e^{-x^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2}{3}e^{x^{\frac{3}{2}}}+c\right) \to y^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}+ce^{-x^{\frac{3}{2}}}$$

۲-۹-۱۰- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $xy'+xy^2=y$

2) $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

3) $y'=y\left(y^3\cos x+\tan x\right)$

4) $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-4}$

5) $y'x^3\sin y+2y=xy'$

6) $2x'-\dfrac{x}{y}+x^3\cos y=0$

7) $\cos x\,dy=(\sin x-y)y\,dx$

8) $(y\ln x-1)y\,dx=x\,dy$

9) $y'+\dfrac{x}{1-x^2}y=x\sqrt{y}$

10) $y'=\dfrac{y^3}{e^{2x}+y^2}$

11) $y'\sin y=(1-x\cos y)\cos y$

12) $y'+x(x+y)=x^3(x+y)^3-1$

13) $\left(x^3y^2\ln y-x\right)y'=y$

14) $4x^2y\,y'=3x\left(3y^2+2\right)+\left(3y^2+2\right)^3$

15) $y'=\dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$

16) $y'+y=x^2e^{2x}y^3$

۲-۱۰- معادله ریکاتی :

فرم کلی معادله ریکاتی به شکل زیر است :

$$y'+p_1(x)y^2+p_2(x)y+p_3(x)=0 \qquad p_1(x)\neq 0$$

جواب معادله ریکاتی به فرم $y=y_1+\frac{1}{z}$ (y_1جواب خصوصی ریکاتی) است. این جواب, معادله ریکاتی را به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می کند.

مثال (۲۰) معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'=1+\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2} \quad , \quad y_1=x$

$$y=x+\frac{1}{z} \to y'=1-\frac{z'}{z^2} \quad , \quad y^2=x^2+\frac{1}{z^2}+\frac{2x}{z}$$

y^2 و y' و y را در معادله صدق می دهیم :

$$\to 1-\frac{z'}{z^2}=1+\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{x^2}\left(x^2+\frac{1}{z^2}+\frac{2x}{z}\right)$$

$$-\frac{z'}{z^2}=1+\frac{1}{xz}-1-\frac{1}{x^2z^2}-\frac{2}{zx}\xrightarrow{\times(-z^2)} z'=-\frac{z}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2z}{x}\rightarrow z'=\frac{z}{x}+\frac{1}{x^2}\rightarrow$$

$$z'-\frac{1}{x}z=\frac{1}{x^2}$$ معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right)\rightarrow z=e^{\ln x}\left(\int\frac{1}{x^2}e^{-\ln x}dx+c\right)$$

$$z=x\left(\int\frac{1}{x^2}\frac{1}{x}dx+c\right)\rightarrow z=x\left(-\frac{1}{2x^2}+c\right)\rightarrow$$

$$z=-\frac{1}{2x}+cx\rightarrow$$ جواب ریکاتی $$y=x+\frac{1}{-\frac{1}{2x}+cx}$$

---

2) $y'=2\tan x\sec x-y^2\sin x \quad , \quad y_1=\sec x$

$$y=\sec x+\frac{1}{z}\rightarrow y'=\sec x\tan x-\frac{z'}{z^2}\quad , \quad y^2=\sec^2 x+\frac{1}{z^2}+\frac{2\sec x}{z}$$

y^2 و y' و y را در معادله صدق می دهیم.

$$\rightarrow \sec x\tan x-\frac{z'}{z^2}=2\tan x\sec x-\sec^2 x\sin x-\frac{\sin x}{z^2}-\frac{2\sin x\sec x}{z}$$
$$\rightarrow \sec x\tan x-\frac{z'}{z^2}=2\tan x\sec x-\tan x\sec x-\frac{\sin x}{z^2}-\frac{2\tan x}{z}$$

$$\xrightarrow{\times(-z^2)} z'-(2\tan x)z=+\sin x$$ معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{\int 2\tan x\,dx}\left(\int\sin x\,e^{-2\int\tan x\,dx}dx+c\right)\rightarrow z=e^{-2\ln\cos x}\left(\int\sin x\,e^{2\ln\cos x}dx+c\right)\rightarrow$$

$$z=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\int\sin x\cos^2 x\,dx+c\right)\rightarrow z=\frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{\cos^3 x}{3}+c\right)$$

$$z=-\frac{\cos x}{3}+c(\sec^2 x)\rightarrow y=\sec x+\frac{1}{-\frac{\cos x}{3}+c(\sec^2 x)}$$

۲-۱۰-۱- تمرین :

(۱) معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'=\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}-y^2 \quad , \quad y_1=\frac{1}{x}$

2) $y'=y^2+8xy+16x^2-5 \quad , \quad y_1=1-4x$

3) $y'+(2x-1)y-y^2=x^2-x+1 \quad , \quad y_1=x$

4) $y'=e^{-x}y^2+y-e^x \quad , \quad y_1=e^x$

5) $y'=(y-x)^2+\dfrac{y}{x} \quad , \quad y_1=x$

6) $x(x^2-1)y'+x^2-(x^2-1)y-y^2=0 \quad , \quad y_1=x^2$

(۲) معادله ریکاتی زیر جوابی بصورت $y_1=a\,e^{bx}$ دارد. مقدار a و b را تعیین و جواب عمومی معادله را بیابید.

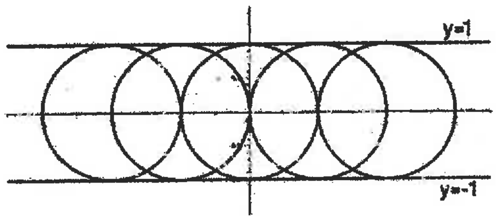
$$y'=e^{-x}y^2+y-e^x$$

۲-۱۱- خانواده منحنی ها و پوش :

پوش دسته منحنی : هرگاه یک منحنی بر همه منحنی های $f(x,y,c)=0$ که به ازای مقادیر مختلف c حاصل می شود، فقط در یک نقطه مماس باشد، پوش دسته منحنی $f(x,y,c)=0$ حاصل می شود.

شکل ۲-۱

به عنوان مثال خطوط $y=\pm1$ بر خانواده دوایر $(x-c)^2+y^2=1$ به مرکز $(c\,,0)$ و شعاع 1 مماس است.



شکل ۲-۲

برای یافتن پوش منحنی کافیست پارامتر c را از دستگاه زیر حذف کنیم :

$$\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ f'_c(x,y,c)=0 \end{cases}$$

در صورتی که حذف c در دستگاه امکان پذیر نباشد، پوش دسته منحنی را بصورت پارامتری برحسب c بیان می کنیم.

مثال (۲۱) پوش دسته منحنی های زیر را بیابید.

1) $y=cx^2-c^3 \;\rightarrow\; c$ مشتق نسبت به $\;0=x^2-3c^2 \;\rightarrow\; c=\sqrt{\dfrac{x^2}{3}} \;\rightarrow\; y=\dfrac{2x^3}{3\sqrt3}$

2) $y=cx-\ln x \;\rightarrow$ مشتق نسبت به c $\;0=x \;\rightarrow$

پس دسته منحنی فاقد پوش است.

3) $y=cx+\dfrac{1}{c} \;\rightarrow\; cy=c^2x+1 \;\rightarrow$ مشتق نسبت به c

$$y=2cx \;\rightarrow\; c=\frac{y}{2x} \;\rightarrow\; y=\frac{y}{2x}(x)+\frac{2x}{y} \;\rightarrow\; y=\frac{y}{2}+\frac{2x}{y} \;\rightarrow\; y^2=4x$$

۲-۱۱-۱- تمرین : پوش دسته منحنی های زیر را در صورت وجود بیابید.

1) $y=cx^2+e^x$

2) $x=cy^2+c$

3) $(x-c)^2+(y-c)^2=4$

4) $y=c(x-4)^2$

معادلات مرتبه اول که نسبت به مشتق حل نشده اند :

۲-۱۲- معادله کلرو : (اختیاری)

هر معادله دیفرانسیل به صورت $y=xy'+f(y')$ را معادله کلرو می نامیم. برای حل آن کافی است $y'=p$ اختیار کنیم $[y=xp+f(p)]$ حال مشتق نسبت به x می گیریم :

$y=xy'+f(y') \;\rightarrow\; y=xp+f(p) \quad (1) \;\rightarrow$ مشتق نسبت به x

$$y'=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}f'(p) \;\rightarrow\; p=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}f'(p)$$

$$\frac{dp}{dx}(x+f'(p))=0$$

حالت اول : اگر $\dfrac{dp}{dx}=0$ باشد داریم :

$\dfrac{dp}{dx}=0 \;\rightarrow\; p=c \xrightarrow{\text{قرار در }(1)} y=cx+f(c)$ جواب عمومی معادله کلرو

حالت دوم : اگر $x+f'(p)=0$ باشد، پس $x=-f'(p)$ و با حذف p از دستگاه زیرجواب غیر عادی معادله کلرو به دست می آید.

$$\begin{cases} x=-f'(p) \\ y=xp+f(p) \end{cases}$$

مثال (۲۲) معادله زیر را حل کنید.

$$1)\ x=y'^2+\frac{y}{y'}\xrightarrow{xy'} xy'=y'^3+y \rightarrow y=xy'-y'^3$$

$$y'=p \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} y=xp-p^3 \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$y'=p+x\frac{dp}{dx}-3p^2\frac{dp}{dx} \rightarrow p=p+\frac{dp}{dx}\left(x-3p^2\right) \rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x-3p^2\right)=0$$

حالت اول :

$$\frac{dp}{dx}=0 \rightarrow p=c \rightarrow y=cx-c^3$$ جواب عمومی

حالت دوم :

$$x-3p^2=0 \rightarrow x=3p^2 \rightarrow \begin{cases} x=3p^2 \quad p=\sqrt{\frac{x}{3}} \\ y=xp-p^3 \end{cases}$$

← هدف حذف p از دستگاه

$$y=x\sqrt{\frac{x}{3}}-\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^3=\sqrt{\frac{x}{3}}\left(x-\frac{x}{3}\right) \rightarrow y=\sqrt{\frac{x}{3}}\left(\frac{2x}{3}\right)$$ جواب غیر عادی

$$2)\ y=xy'-\ln y' \rightarrow y'=p \rightarrow y=xp-\ln p \quad (1) \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$y'=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} \rightarrow p=p+\frac{dp}{dx}\left(x-\frac{1}{p}\right) \rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x-\frac{1}{p}\right)=0 \rightarrow$$

حالت اول :

$$\frac{dp}{dx}=0 \rightarrow p=c \xrightarrow{\text{جای گذاری در (1)}} y=cx-\ln c$$ جواب عمومی

حالت دوم :

$$x-\frac{1}{p}=0 \rightarrow \begin{cases} y=px-\ln p \\ x=\frac{1}{p} \rightarrow p=\frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow y=1-\ln\frac{1}{x} \rightarrow$$

$$y=1+\ln x$$ جواب غیر عادی

$$3)\ y = xy' - e^{y'} \rightarrow y' = p \rightarrow y = xp - e^{p} \quad (1) \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}e^{p} \rightarrow p = p + \frac{dp}{dx}\left(x - e^{p}\right)$$

حالت اول :

$$\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \xrightarrow{\text{جای گذاری در (1)}} y = cx - e^{c}$$ جواب عمومی

حالت دوم :

$$x - e^{p} = 0 \rightarrow \begin{cases} y = xp - e^{p} \\ x = e^{p} \rightarrow p = \ln x \end{cases} \rightarrow y = x\ln x - e^{\ln x} \rightarrow$$

$$y = x\ln x - x$$ جواب غیر عادی

۲-۱۲-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $y = xy' + \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

2) $y = xy' + \cos y'$

3) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$

4) $y = xy' - \dfrac{1}{4}(y')^2$

5) $y = xy' - \sin y'$

6) $xy'^2 - yy' + 3 = 0$

۲-۱۳- معادله لاگرانژ : (اختیاری)

هر معادله به شکل $y = xf(y') + g(y')$ یک معادله لاگرانژ است.

نحوه حل : اگر $y' = p$ باشد در این صورت $y = xf(p) + g(p)$, پس با مشتق گیری از معادله داریم :

$$y' = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}g'(p) \xrightarrow{y'=p} p - f(p) = \frac{dp}{dx}\left(xf'(p) + g'(p)\right)$$

حالت اول : اگر $p - f(p) = 0$ آنگاه برای هر ریشه آن مثل p_0، جواب غیر عادی معادله لاگرانژ $y = xf(p_0) + g(p_0)$ حاصل می شود.

حالت دوم : اگر $p - f(p) \neq 0$ در این صورت از معادله $p - f(p) = \dfrac{dp}{dx}\left(xf'(p) + g'(p)\right)$ با فرض $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1}{x'}$ داریم :

$$p - f(p) = \frac{1}{x'}\left(xf'(p) + g'(p)\right) \rightarrow \left(p - f(p)\right)x' - xf'(p) = g'(p) \rightarrow x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

معادله خطی مرتبه اول نسبت به x حاصل می شود.

$$x=e^{-\int -\frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}\left(\int \frac{g'(p)}{p-f(p)}e^{-\int \frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}dp+c\right)$$

لذا جواب عمومی معادله لاگرانژ از حذف p در دستگاه زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} x=e^{-\int -\frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}\left(\int \frac{g'(p)}{p-f(p)}e^{-\int \frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}dp+c\right) \\ y=xf(p)+g(p) \end{cases}$$

جواب غیر عادی معادله لاگرانژ پوش خانواده جواب های عمومی است.

مثال (۲۳) معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ y=x(y')^2+(y')^3 \xrightarrow{\text{لاگرانژ}} y'=p \rightarrow$$

$$y=xp^2+p^3 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=p^2+2px\frac{dp}{dx}+3p^2\frac{dp}{dx} \rightarrow p-p^2=\left(2px+3p^2\right)\frac{dp}{dx}$$

حالت اول : $p-p^2=0 \leftarrow \begin{cases} p=0 \\ p=1 \end{cases}$ ← جواب های غیر عادی معادله لاگرانژ به قرار زیر است :

$$y=xp^2+p^3 \begin{cases} \rightarrow\ y=0 \\ \rightarrow\ y=x+1 \end{cases}$$

حالت دوم : اگر $p-p^2\neq 0 \leftarrow$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{(2x+3p)p}{p(1-p)} \rightarrow \frac{dx}{dp}=\frac{2x+3p}{1-p} \rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{2}{1-p}x=\frac{3p}{1-p} \rightarrow \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=\frac{3p}{1-p} \rightarrow$$

معادله خطی مرتبه اول

$$x=e^{-\int \frac{2}{p-1}dp}\left(\int \frac{3p}{1-p}e^{\int \frac{2}{p-1}dp}dp+c\right)$$

$$\rightarrow x=e^{-2\ln(p-1)}\left(\int \frac{3p}{1-p}e^{2\ln(p-1)}dp+c\right) \rightarrow x=\frac{1}{(p-1)^2}\left(\int \frac{3p(p-1)^2}{-(p-1)}dp+c\right)$$

$$\to x=\frac{1}{(p-1)^2}\left(-\int 3p(p-1)dp+c\right) \to x=\frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^3+\frac{3p^2}{2}+c\right)$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\left(\dfrac{3p^2}{2}-p^3+c\right)}{(p-1)^2} \\ y=xp^2+p^3 \end{cases} \to$$

جواب عمومی معادله لاگرانژ از حذف p در دستگاه روبرو حاصل می شود.

$$\begin{cases} x=\dfrac{\left(\dfrac{3p^2}{2}-p^3+c\right)}{(p-1)^2} \\ y=\dfrac{\left(\dfrac{3p^2}{2}-p^3+c\right)}{(p-1)^2}p^2+p^3 \end{cases}$$

نکته : اگر حذف p از دستگاه بالا مقدور نیست خود دستگاه را می نویسیم.

2) $y=2xy'+\sin y' \xrightarrow{\text{لاگرانژ}} y'=p \to$

$$y=2xp+\sin p \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=2p+2x\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}\cos p \to p-2p=\frac{dp}{dx}(2x+\cos p)$$

حالت اول : $p-2p=0 \leftarrow p=0 \leftarrow$ جواب های غیر عادی معادله برابر با

$$y=2xp+\sin p \xrightarrow{p=0} p=0$$

حالت دوم : اگر $p-2p\neq 0 \leftarrow$ جواب عمومی معادله لاگرانژ حاصل می شود :

$$-p\frac{dx}{dp}=2x+\cos p \to \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=\frac{\cos p}{-p} \to x=e^{-\int\frac{2}{p}dp}\left(\int\frac{\cos p}{-p}e^{\int\frac{2}{p}dp}dp+c\right)$$

$$x=e^{-2\ln p}\left(\int\frac{\cos p}{-p}e^{2\ln p}dp+c\right) \to x=\frac{1}{p^2}\left(-\int p\cos p\,dp+c\right) \to x=\frac{1}{p^2}(-p\sin p-\cos p+c)$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-p\sin p-\cos p+c}{p^2} \\ y=2xp+\sin p \end{cases} \to$$

جواب عمومی معادله لاگرانژ از حذف p در دستگاه زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} x = \dfrac{-p\sin p - \cos p + c}{p^2} \\ \\ y = \dfrac{2}{p}(-p\sin p - \cos p + c) + \sin p = \dfrac{2c}{p} - \dfrac{2\cos p}{p} - \sin p \end{cases}$$

۲-۱۳-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $y = x(y')^2 + y'$

2) $y = x(1+y') + y'^2$

3) $y = -xy' + y'^2$

4) $y = xy'^2 - \dfrac{1}{y'}$

5) $y = \dfrac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$

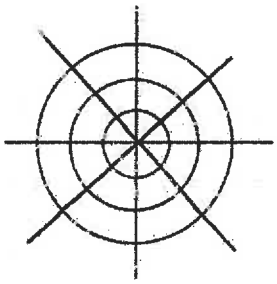
6) $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'}$

7) $y' = xy'^3 + y'^3$

۲-۱۴- مسیرهای متعامد (قائم) :

مسیرهای متعامد بر دسته منحنی های c_f تمام منحنی هایی مانند c_g می باشند که در نقطه تقاطع هر منحنی از منحنی های c_f با هر یک از منحنی های c_g دو خط مماس در نقطه تقاطع قائم باشند، یا به عبارت دیگر دو منحنی در نقطه تقاطع بر هم عمود باشند.

به عنوان مثال خانواده خطوط $y = c_2x$ و $x^2 + y^2 = c_1$ دو خانواده متعامد هستند چون طبق شکل زیر در هر نقطه تلاقی هر دایره با هر خط عمود هستند.



شکل ۲-۳

طریقه بدست آوردن مسیرهای متعامد یک دسته منحنی :

۱- ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می کنیم (هدف حذف C است).

۲- سپس در این معادله به جای y' ، $-\dfrac{1}{y'}$ قرار می دهیم تا معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست آید.

۳- حال اگر معادله دیفرانسیل مسیر قائم را حل کنیم، دسته منحنی مسیر قائم بدست می آید.

نکته : اگر معادله یک دسته منحنی به فرم قطبی بیان شده باشد معادله دیفرانسیل مسیر اصلی بصورت $f\left(r,\theta,\dfrac{dr}{d\theta}\right) = 0$ می باشد و معادله دیفرانسیل مسیر قائم به فرم $f\left(r,\theta,-r^2\dfrac{d\theta}{dr}\right) = 0$ بیان می شود.

از این روش زمانی که مختصات برحسب r و θ بیان شود یا عبارت x^2+y^2 در دسته منحنی وجود داشته باشد (برای راحتی کار) استفاده می شود.

در روش قطبی همان سه مرحله را انجام می دهیم فقط در مرحله (۲) به جای $\frac{dr}{d\theta}$، $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ قرارمی دهیم.

دستور کلی :

دسته منحنی ← مشتق می گیریم و c را حذف می کنیم (معادله دیفرانسیل) ← به جای $y' \to -\frac{1}{y'}$ یا

$\frac{dr}{d\theta} \leftarrow -r^2\frac{d\theta}{dr}$ (معادله دیفرانسیل جدید) ← حل ← مسیر متعامد

مثال (۲۴) مسیرهای قائم هر یک از دسته منحنی های زیر را بیابید.

$$1)\ y^2 = 4(x-c) \;\to\; 2yy' = 4 \;\to\; yy' = 2$$

برای یافتن مسیر متعامد ← $y' \to -\frac{1}{y'}$

$$-\frac{y}{y'} = 2 \;\to\; \frac{-y\,dx}{dy} = 2 \;\to\; \int -\frac{dx}{2} = \int \frac{dy}{y} \;\to\; -\frac{x}{2} + c_1 = \ln y \;\to\; y = ce^{-\frac{1}{2}x}$$

$$2)\ y = \frac{c}{1+cx} \;\to\; y' = -\frac{c^2}{(1+cx)^2} \;\to\; y' = -y^2$$

برای یافتن مسیر متعامد ← $y' \to -\frac{1}{y'}$

$$-\frac{1}{y'} = -y^2 \;\to\; \frac{dx}{dy} = y^2 \;\to\; \int dx = \int y^2\,dy \;\to\; x + c = \frac{y^3}{3}$$

$$3)\ \cos y = ce^{-x} \;\to\; c = \frac{\cos y}{e^{-x}}$$

$$-y'\sin y = -ce^{-x} \;\to\; -y'\sin y = -\frac{\cos y}{e^{-x}}e^{-x} \;\to\; y' = \frac{\cos y}{\sin y}$$

برای یافتن مسیر متعامد ← $y' \to -\frac{1}{y'}$

$$-\frac{1}{y'} = \frac{\cos y}{\sin y} \;\to\; \int -\frac{dx}{dy} = \int \frac{\cos y}{\sin y} \;\to\; \int -dx = \int \frac{\cos y}{\sin y}dy$$

$$\to\; -x = \ln\sin y + \ln c_1 \;\to\; -x = \ln c_1 \sin y \;\to\; e^{-x} = c_1 \sin y \xrightarrow{\frac{1}{c_1}=c} \sin y = ce^{-x}$$

$$4)\ y^2+2cx=c^2 \quad (c>0) \ \rightarrow\ 2yy'+2c=0 \quad (A)$$

از خود دسته منحنی c را با حل معادله درجه ۲ برحسب c می یابیم.

$$c^2-2cx-y^2=0 \ \rightarrow\ \Delta=4x^2+4y^2=4\left(x^2+y^2\right)$$

$$c=\frac{2x\pm2\sqrt{x^2+y^2}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+y^2} \ \xrightarrow{c>0}\ c=x+\sqrt{x^2+y^2}$$

c را در رابطه A قرار می دهیم.

$$2yy'+2x+2\sqrt{x^2+y^2}=0 \ \rightarrow\ y'=\frac{-x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

برای یافتن مسیر متعامد $\leftarrow$ $y'\rightarrow-\frac{1}{y'}$

$$-\frac{1}{y'}=\frac{-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{y} \ \rightarrow\ \frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

معادله از نوع همگن است.

$$y'=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \ \rightarrow\ \frac{y}{x}=z \ \rightarrow\ y=xz \ \rightarrow\ y'=z+z'x$$

$$\rightarrow\ z'x+z=\frac{zx}{x+\sqrt{x^2+x^2z^2}} \ \rightarrow\ z'x+z=\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$\rightarrow\ z'x=\frac{z-z-z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}} \ \rightarrow\ \frac{dz}{dx}x=\frac{-z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}$$ معادله جدایی پذیر

$$\rightarrow\ \int\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{-z\sqrt{1+z^2}}dz=\int\frac{dx}{x} \ \rightarrow\ \ln\left|\frac{\sqrt{1+z^2}+1}{z}\right|-\ln z=\ln x+\ln c$$

$$\rightarrow\ \frac{\sqrt{1+z^2}+1}{z^2}=xc \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+1}{\frac{y^2}{x^2}}=xc$$

$$\rightarrow\ \frac{\sqrt{1+y^2}+x}{y^2}=c \ \rightarrow\ c^2y^2=1+2cx$$ مسیر متعامد

$$5)\ y=\ln\left(x^3+c\right) \ \rightarrow\ e^y=x^3+c$$

$$y'=\frac{3x^2}{x^3+c} \ \rightarrow\ y'=\frac{3x^2}{e^y}$$ معادله دیفرانسیل

برای یافتن مسیر متعامد $\leftarrow$ $y' \to -\dfrac{1}{y'}$

$$-\frac{1}{y'}=\frac{3x^2}{e^y} \to \int -\frac{dx}{3x^2}=\int e^{-y}dy \to \frac{1}{3x}+c=-e^{-y} \to y=\ln\left(-\frac{1}{3x}-c\right)$$

6) $y=e^{cx} \to \ln y=cx \to c=\dfrac{\ln y}{x}$

$$y'=ce^{cx} \to y'=\frac{\ln y}{x}y \to$$

برای یافتن مسیر متعامد $\leftarrow$ $y' \to -\dfrac{1}{y'}$

$$-\frac{1}{y'}=\frac{\ln y}{x}y \to -\frac{dx}{dy}=\frac{\ln y}{x}y \to \int -x\,dx=\int y\ln y\,dy$$

$$\to \begin{cases} u=\ln y \to du=\dfrac{dy}{y} \\ dv=y\,dy \to v=\dfrac{y^2}{2} \end{cases} \to -\frac{x^2}{2}+c=\frac{y^2}{2}\ln y-\int \frac{y}{2}dy$$

$$-\frac{x^2}{2}+c=\frac{y^2}{2}\ln y-\frac{y^2}{4}$$

7) $y^2=cx^3+x^2-1 \to c=\dfrac{y^2-x^2+1}{x^3}$

$$2y'y=3cx^2+2x \to 2y'y=3\frac{y^2-x^2+1}{x^3}x^2+2x$$

$$\to 2y'y=3\frac{y^2-x^2+1}{x}+2x \to 2y'y=\frac{3y^2-3x^2+3+2x^2}{x}$$

برای یافتن مسیر متعامد $\leftarrow$ $y' \to -\dfrac{1}{y'}$

$$-\frac{2y}{y'}=\frac{3y^2-x^2+3}{x} \to x'2y=x-3\left(y^2+1\right)x^{-1} \xrightarrow{\div 2y}$$

$$\to x'-\frac{1}{2y}x=-3\frac{\left(y^2+1\right)x^{-1}}{2y}$$ برنولی نوع (ب)

$$\xrightarrow{\div x^{-1}} xx'-\frac{1}{2y}x^2=-3\frac{(y^2+1)}{2y} \rightarrow \begin{cases} x^2=z \\ xx'=\frac{z'}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{z'}{2}-\frac{1}{2y}z=\frac{-3(y^2+1)}{2y} \rightarrow z'-\frac{1}{y}z=\frac{-3(y^2+1)}{2y}$$

معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int\frac{-3(y^2+1)}{y}e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+c\right)$$

$$\rightarrow z=e^{\ln y}(\int\frac{-3(y^2+1)}{y}e^{-\ln y}dy+c) \rightarrow z=y\,(-3\int\frac{y^2+1}{y^2}dy+c) \rightarrow z=y\left(-3y+\frac{3}{y}+c\right)$$

$$x^2=-3y^2+3+cy$$

$$8)\ r=c(\sec\theta+\tan\theta) \rightarrow c=\frac{r}{\sec\theta+\tan\theta}$$

$$r'=c(\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta) \rightarrow r'=c\sec\theta(\tan\theta+\sec\theta)$$

$$r'=\frac{r}{\tan\theta+\sec\theta}\sec\theta(\tan\theta+\sec\theta) \rightarrow r'=r\sec\theta$$

برای یافتن مسیر متعامد $\leftarrow r'\rightarrow-\frac{r^2}{r'}$

$$-\frac{r^2}{r'}=r\sec\theta \rightarrow -\frac{rd\theta}{dr}=\sec\theta \rightarrow \int-\cos\theta d\theta=\int\frac{dr}{r} \rightarrow -\sin\theta+c_1=\ln r \rightarrow r=ce^{-\sin\theta}$$

$$9)\ r=c(1+\cos\theta) \rightarrow c=\frac{r}{1+\cos\theta}$$

$$r'=-c\sin\theta \rightarrow r'=\frac{-r}{1+\cos\theta}\sin\theta$$ معادله دیفرانسیل

برای یافتن مسیر متعامد $\leftarrow r'\rightarrow-\frac{r^2}{r'}$

$$-\frac{r^2}{r'}=\frac{-r}{1+\cos\theta}\sin\theta \rightarrow \frac{rd\theta}{dr}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \rightarrow \int\frac{dr}{r}=\int\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \rightarrow$$

$$\ln r+\ln c=-\ln|\csc\theta+\cot\theta|+\ln|\sin\theta| \rightarrow \ln cr=\ln\frac{\sin\theta}{\csc\theta+\cot\theta} \rightarrow rc=\frac{\sin\theta}{\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$\ln cr=\ln\frac{\sin\theta}{\csc\theta+\cot\theta}\to rc=\frac{\sin\theta}{\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}}\to rc=\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos\theta}\to r=c(1-\cos\theta)$$

۱۰) منحنی های عمود بر همه دایره هایی که مرکز آنها بر محور X ها و از مبدا مختصات می گذرند را بیابید.

$$(x-c)^2+y^2=c^2\to x^2+c^2-2cx+y^2=c^2$$

$x^2+y^2=2cx \to$ بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم.

$$r^2=2cr\cos\theta\to c=\frac{r}{2\cos\theta}$$

$$r=2c\cos\theta\to r'=-2c\sin\theta\to r'=-2\frac{r}{2\cos\theta}\sin\theta$$

$$\to r'=-r\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\xrightarrow{r'\to-\frac{r^2}{r'}}-\frac{r^2}{r'}=-r\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\to r\frac{d\theta}{dr}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\to\int\frac{dr}{r}=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$\to \ln\sin\theta+\ln c=\ln r\to c\sin\theta=r\xrightarrow{\times r} rc\sin\theta=r^2\to x^2+y^2=cy$$

همین مثال را اگر با مختصات دکارتی حل می کردیم بسیار طولانی می شد.

۲-۱۴-۱- تمرین : مسیرهای متعامد بر خانواده منحنی های زیر را بیابید.

1) $xy=c$
2) $x^2+y^2=c^2$
3) $y=x+ce^{-x}$
4) $y=\ln(x^2+3c)$
5) $x^3y+xy^3=c$
6) $y=\dfrac{x}{cx+1}$
7) $y^2=4c(x+c)$
8) $x^2-y^2=2cx$
9) $y=c(\sec x+\tan x)$
10) $e^x+e^{-y}=c$
11) $r=c\sin\theta\tan\theta$
12) $r=\dfrac{c}{2+\cos\theta}$
13) $r=c(4\cos\theta-\sec\theta)$
14) $r=c(1+\sin^2\theta)$
15) $x^2-xy+y^2=c^2$
16) $y^2=2x^2(1-cx)$
17) $y^2=\dfrac{x^3}{c-x}$
18) $r^2=c\cos2\theta$
19) $x^2+y^2=cy$
20) $x^2-c^2y^2=16$
21) $r=2c(\sin\theta-\cos\theta)$
22) $y=\sin(x+c)$
23) $y=\dfrac{1+cx}{1-cx}$

فصل سوم : معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

۳-۱- معادلات مرتبه دوم

فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بصورت $f=(x,y,y',y'')$ است.

معادلات دیفرانسیل را به دو دسته خطی و غیر خطی طبقه بندی می کنند.

فرم کلی معادلات خطی مرتبه دوم به فرم $y''+p(x)y'+q(x)y=R(x)$ است. معادلات مرتبه دو که به این فرم نباشند، غیر خطی اند.

در ابتدا چهار نوع معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خاص را بررسی می کنیم

۳-۱- ۱- معادلات مرتبه دوم قابل تحویل به مرتبه اول

حالت اول : معادله فاقد متغیر وابسته y باشد $(f(x,y',y'')=0)$:

در این حالت از $y'=p$ و $y''=\frac{dp}{dx}$ استفاده می کنیم.

حالت دوم : معادله فاقد متغیر x مستقل باشد $(f(y,y',y'')=0)$:

در این حالت از تغییر متغیر $y'=p$ و $y''=p\frac{dp}{dy}$ استفاده می کنیم.

حالت سوم : معادله فاقد x,y باشد $(f(y',y'')=0)$:

در این حالت فرض می کنیم $y'=p$ و $y''=p'$.

حالت چهارم :

اگر معادله $f=(x,y,y',y'')$ نسبت به y'',y',y همگن باشد یعنی $f(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^n f(x,y,y',y'')$ می توان با تغییر متغیر $y=e^{\int z dx}$ (z تابعی مجهول از x است) معادله مرتبه دوم را تبدیل به یک معادله مرتبه اول کرد.

$$y=e^{\int z dx}\to y'=ze^{\int z dx}\to y''=z'e^{\int z dx}+z^2e^{\int z dx}=e^{\int z dx}\left(z^2+z'\right)$$

مثال (۱) معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$1)\ xy''+y'=1 \qquad (x>0)$$

$$y \text{ فاقد} \to y'=p \to y''=p' \to xp'+p=1 \to$$

$$p'+\frac{1}{x}p=\frac{1}{x}$$ خطی مرتبه اول

$$p=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{dx}{x}}dx+c_1\right) \to p=e^{-\ln x}\left(\int\frac{1}{x}e^{\ln x}dx+c_1\right)$$

$$p=\frac{1}{x}(x+c_1)\ \rightarrow\ y'=1+\frac{c_1}{x}\ \xrightarrow{\int dx}\ y=x+c_1\ln x+c_2$$

2) $yy''-(y')^2-(y')^3(\ln y)=0$

$$x\ \text{فاقد}\rightarrow y'=p\rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}\ \rightarrow\ y\left(p\frac{dp}{dy}\right)-p^2-p^3\ln y=0$$

$$\rightarrow\ p\left(y\frac{dp}{dy}-p-p^2\ln y\right)=0$$

اگر $\quad p=0\ \rightarrow\ y'=0\ \rightarrow\ y=c$

اگر $\quad p\neq 0\ \rightarrow\ y\frac{dp}{dy}-p-p^2\ln y=0\ \rightarrow\ y\frac{dp}{dy}=p^2\ln y+p$

$$\xrightarrow{\div y}\ \frac{dp}{dy}-\frac{1}{y}p=\frac{p^2}{y}\ln y \qquad \text{برنولي}\ \begin{cases} p & \text{وابسته} \\ y & \text{مستقل}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div p^2}\ p^{-2}\frac{dp}{dy}-\frac{1}{y}p^{-1}=\frac{\ln y}{y}\ \rightarrow\ p^{-1}=z\ \rightarrow$$

$$-p^{-2}\frac{dp}{dy}=z'\ \rightarrow\ p^{-2}\frac{dp}{dy}=-z'\ \rightarrow\ -z'-\frac{1}{y}z=\frac{\ln y}{y}$$

$$\xrightarrow{\times(-1)}\ z'+\frac{1}{y}z=-\frac{\ln y}{y}$$ خطی مرتبه اول

$$z=e^{-\int\frac{dy}{y}}\left(\int\frac{-\ln y}{y}e^{\int\frac{dy}{y}}dy+c_1\right)\ \rightarrow\ z=\frac{1}{y}\left(\int-\ln y\,dy+c_1\right)$$

$$z=\frac{1}{y}(-y\ln y+y+c_1)\ \rightarrow\ p^{-1}=-\ln y+1+\frac{c_1}{y}\ \rightarrow$$

$$\frac{1}{p}=-\ln y+1+\frac{c_1}{y}\ \xrightarrow{p=y'}\ \frac{dx}{dy}=-\ln y+1+\frac{c_1}{y}\ \rightarrow$$

$$\int dx=\int\left(-\ln y+1+\frac{c_1}{y}\right)dy\ \rightarrow\ x=-y\ln y+y+y+c_1\ln y+c_2$$

3) $2yy''-3(y')^2=4y^4$ (فاقد x)

$$\rightarrow\ y'=p\rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}\ \rightarrow\ 2y\left(p\frac{dp}{dy}\right)-3p^2=4y^4\ \xrightarrow{\div 2yp}$$

$$\frac{dp}{dy}-\frac{3p}{2y}=2y^3p^{-1}$$ معادله برنولی $$\xrightarrow{\div p^{-1}} p\frac{dp}{dy}-\frac{3p^2}{2y}=2y^3$$

$$p^2=z \;\rightarrow\; p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\frac{dz}{dy}-\frac{3}{2y}z=2y^3 \xrightarrow{\times 2}$$

$$\frac{dz}{dy}-\frac{3}{y}z=4y^3$$ معادله خطی مرتبه اول

$$z=e^{\int\frac{3dy}{y}}\left(\int 4y^3e^{-\int\frac{3dy}{y}}dy+c_1\right) \;\rightarrow\; z=e^{3\ln y}\left(\int 4y^3e^{-3\ln y}dy+c_1\right)$$

$$z=y^3\left(\int 4dy+c_1\right) \;\rightarrow\; z=y^3(4y+c_1) \;\rightarrow$$

$$z=p^2=4y^4+c_1y^3 \;\rightarrow\; y'^2=4y^4+c_1y^3 \rightarrow y'=\sqrt{4y^4+c_1y^3}$$

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{4y^2+c_1y}}=\int dx \;\rightarrow\; y=\frac{1}{t} \;\rightarrow\; dy=\frac{dt}{-t^2}$$

$$\int\frac{\frac{dt}{-t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{4}{t^2}+\frac{c_1}{t}}}=x+c_2 \;\rightarrow\; -\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{4+c_1t}{t^2}}}=x+c_2$$

$$\rightarrow\; \int-\frac{dt}{\sqrt{4+c_1t}}=x+c_2 \;\rightarrow\; -\frac{2}{c_1}\sqrt{4+c_1t}=x+c_2 \;\rightarrow\; -\frac{2}{c_1}\sqrt{4+\frac{c_1}{y}}=x+c_2$$

---

4) $2y''-(y')^2+4=0$ (معادله فاقد x و y است.)

$$\rightarrow y'=p\rightarrow y''=p' \;\rightarrow\; 2p'-p^2+4=0 \;\rightarrow\; p'=\frac{p^2-4}{2}$$

$$\rightarrow\; \frac{dp}{dx}=\frac{p^2-4}{2} \;\rightarrow\; \int\frac{dp}{p^2-4}=\int\frac{dx}{2}$$

$$\rightarrow\; \frac{1}{4}\ln\frac{p-2}{p+2}=\frac{1}{2}x+c_1 \;\rightarrow\; \frac{p-2}{p+2}=e^{2x+c_1} \;\rightarrow\; \frac{p-2}{p+2}=c_2e^{2x}$$

$$\rightarrow\; p=\frac{2c_2e^{2x}+2}{1-c_2e^{2x}} \;\rightarrow\; y'=\frac{2c_2e^{2x}+2}{1-c_2e^{2x}}$$

$$\int dy=2\int\frac{c_2e^{2x}+1}{1-c_2e^{2x}}dx \;\rightarrow\; y=2c_2\int\frac{e^{2x}}{1-c_2e^{2x}}dx+2\int\frac{dx}{1-c_2e^{2x}} \xrightarrow{*}$$

$$y=-\ln\left|1-c_2e^{2x}\right|-\ln\left|e^{-2x}-c_2\right|+c_3$$

$$* \quad \int \frac{dx}{1-c_2e^{2x}} \times \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}} = \int \frac{e^{-2x}dx}{e^{-2x}-c_2} = \frac{-1}{2}\ln\left|e^{-2x}-c_2\right|$$

$5)\ yy''-(y')^2=6xy^2$ (معادله نسبت به y و y' و y'' همگن است.)

$$y=e^{\int zdx} \rightarrow y'=ze^{\int zdx} \rightarrow y''=(z'+z^2)e^{\int zdx} \rightarrow$$

$$e^{\int zdx}(z'+z^2)e^{\int zdx}-z^2e^{2\int zdx}=6xe^{2\int zdx} \rightarrow z'+z^2-z^2=6x \rightarrow \frac{dz}{dx}=6x \rightarrow z=3x^2+c_1$$

$$y=e^{\int zdx} \rightarrow y=e^{\int 3x^2+c_1} \rightarrow y=e^{x^3+c_1x+c_2}$$

$6)\ 2yy''-3(y')^2=4y^2$ (معادله نسبت به y و y' و y'' همگن آست.)

$$y=e^{\int zdx} \rightarrow y'=ze^{\int zdx} \rightarrow y''=(z'+z^2)e^{\int zdx} \rightarrow$$

$$2e^{\int zdx}(z'+z^2)e^{\int zdx}-3z^2e^{2\int zdx}=4e^{2\int zdx} \rightarrow$$

$$2z'+2z^2-3z^2=4 \rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{4+z^2}{2} \rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{z^2+4}{2}$$

$$\rightarrow 2\int\frac{dz}{z^2+4}=\int dx \rightarrow \tan^{-1}\frac{z}{2}=x+c_1 \rightarrow z=2\tan(x+c_1)$$

$$y=e^{2\int \tan(x+c_1)dx} \rightarrow y=e^{-2\ln(\cos(x+c_1))+c_2} \rightarrow y=\frac{c_2}{\cos^2(x+c_1)}$$

۳-۱-۲- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

$1)\ x^2y''+2xy'=1$

$2)\ y''=\frac{y'}{x}\left[1+\ln\frac{y'}{x}\right]$

$3)\ 3y''=y^{-5/3}$

$4)\ y''y^3=1$

$5)\ x^2yy''=(y-xy')^2$

$6)\ yy''+(y+1)y'^2=0$

$7)\ y''+y'^2=2e^{-y}$

$8)\ xy''=y'+y'^3$

$9)\ xy''-y'=3x^2$

$10)\ xy''+y'=y'^2$

۳-۲- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y''+p(x)y'+q(x)y=R(x)$$

معادله همگن ← $R(x)=0$

معادله ناهمگن ← $R(x)\neq 0$

قضیه : اگر y_p جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیر همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=R(x)$ و $y_g(y_h)$ جواب عمومی معادله همگن نظیر آن باشد $y=y_g+y_p$ را جواب عمومی معادله غیر همگن می باشد.

قضیه : اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشند، در این صورت $y=c_1y_1+c_2y_2$ نیز جواب معادله دیفرانسیل می باشد که همان y_g است.

هر ترکیب خطی از دو جواب معادله همگن نیز جواب معادله است.

تعریف : دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مستقل خطی اند اگر $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابعی از x باشد و وابسته خطی اند اگر $\frac{f(x)}{g(x)}$ ثابت باشد.

تعریف : رونسکین توابع y_1 و y_2 را بصورت $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ تعریف می نماییم. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ وابسته خطی باشند $W(f(x),g(x))=0$ است. و اگر $W(f(x),g(x))\neq 0$ آنگاه $f(x)$ و $g(x)$ مستقل خطی اند.

نتیجه : اگر y_1 و y_2 جواب معادله همگن باشند، در این صورت y_1 و y_2 مستقل خطی اند اگر و تنها اگر $W(y_1\ ,y_2\ )\neq 0$

۳-۳- روش های حل معادلات خطی مرتبه دوم همگن : $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

۳-۳-۱- روش (۱) معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت $y''+py'+qy=0$

که در آن p و q اعداد ثابت اند. برای حل این معادله کافیست معادله مشخصه (مفسر) معادله را بنویسیم. برای این کار قرار می دهیم :

$(y=1, y'=m, y''=m^2)$ و داریم $m^2+pm+q=0$ که یک معادله درجه ۲ است که با روش دلتا قابل حل است و بدیهی است برای ریشه های معادله مشخصه ۳ حالت پیش می آید :

حالت اول : $\Delta>0$ معادله دارای دو ریشه حقیقی m_1 و m_2 است در این صورت جواب عمومی معادله ترکیب خطی از e^{m_1x} و e^{m_2x} است :

$$y_g=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$$

حالت دوم : $\Delta=0$ معادله دارای یک ریشه مضاعف (تکراری) است، در این صورت جواب عمومی ترکیب خطی از e^{mx} و xe^{mx} است : $y_g=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$

حالت سوم : $\Delta<0$ معادله دارای ریشه مختلط بصورت $a\pm bi$ است. در این صورت جواب عمومی ترکیب خطی از $e^{ax}\cos bx$ و $e^{ax}\sin bx$ است : $y_g=e^{ax}(c_1\sin bx+c_2\cos bx)$

مثال (۲) جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$1)\ y''-3y'+2y=0 \rightarrow m^2-3m+2=0 \rightarrow \Delta=1 \rightarrow$$

$$m_1=1 \quad , \quad m_2=2 \rightarrow y_g=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

$$2)\ y''-6y'+9y=0 \rightarrow m^2-6m+9=0 \rightarrow \Delta=0 \rightarrow$$

$$m=3 \rightarrow y_g=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$$

$$3)\ y''+2y'+5y=0 \rightarrow m^2+2m+5=0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow$$

$$m=-1\pm 2i \rightarrow y_g=e^{-x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$$

$$4)\ y''+9y=0 \rightarrow m^2+9=0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow$$

$$m=\pm 3i \xrightarrow{e^0=1} y_g=c_1\sin 3x+c_2\cos 3x$$

۳-۳-۱-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $y''+5y'+6y=0$ 2) $y''+2y'+y=0$

3) $y''+y'+y=0$ 4) $y''+16y=0$

۳-۳-۲- روش (۲) روش کاهش مرتبه (یافتن جواب عمومی با استفاده از جواب معلوم y_1):

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

در این روش ابتدا $V(x)$ را محاسبه می کنیم و سپس به کمک فرمول $y_2=V(x)y_1$، y_2 حاصل می شود.

$$V(x)=\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx \rightarrow y_2=V(x)y_1$$

نکته : در این روش $V(x)$ نباید عدد ثابت شود به فرمول بالا فرمول آبل نیز می گویند.

نکته : در این روش ضریب y'' باید یک باشد.

مثال(۳) اولاً نشان دهید $y_1=x$ جوابی از معادله $x^2y''+xy'-y=0$ است سپس جواب عمومی معادله را بیابید ؟

$$y_1=x \rightarrow y_1'=1 \rightarrow y_1''=0 \xrightarrow{\text{در معادله}}$$

$$x^2(0)+x(1)-x=0 \rightarrow 0=0$$ پس جواب است.

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0 \rightarrow V(x)=\int \frac{1}{x^2}e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx$$

$$V(x)=\int \frac{1}{x^2}e^{-\ln x}dx=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}=\frac{1}{-2x^2} \rightarrow y_2=V(x)y_1 \rightarrow y_2=\frac{1}{-2x^2}x=-\frac{1}{2x}$$

$$y_g=y_h=c_1y_1+c_2y_2=c_1x+c_2\left(-\frac{1}{2x}\right) \rightarrow y_g=c_1x+c_2\frac{1}{x}$$

نکته : در معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$:

الف) اگر مجموع ضرایب صفر باشد ($1+p(x)+q(x)=0$) آنگاه $y_1=e^x$ جوابی از معادله است.

ب) اگر $1-p(x)+q(x)=0$ آنگاه $y_1=e^{-x}$ جوابی از معادله است.

ج) اگر $p(x)+xq(x)=0$ باشد آنگاه $y_1=x$ جوابی از معادله است.

مثال(۴) نشان دهید اگر مجموع ضرایب یک معادله دیفرانسیل همگن صفر شود آنگاه یکی از جوابها e^x است.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \xrightarrow{\text{فرض}} 1+p(x)+q(x)=0$$

$$y_1=e^x \xrightarrow{\text{حکم}} y_1=e^x \rightarrow y_1'=e^x \rightarrow y_1''=e^x$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} e^x+p(x)e^x+q(x)e^x=0 \rightarrow e^x(1+p(x)+q(x))=0$$

$$\xrightarrow{e^x\neq 0} 1+p(x)+q(x)=0$$

ثابت شد.

مثال (۵) معادله $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$ را حل کنید.

چون مجموع ضرایب صفر است پس $y_1=e^x$,ازطرفی $y''-\frac{2x+1}{x}y'+\frac{x+1}{x}y=0$

$$V(x)=\int \frac{1}{e^{2x}}e^{+\int\frac{2x+1}{x}dx}dx \rightarrow V(x)=\int e^{-2x}e^{2x+\ln x}dx=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$$

$$y_2=V(x)(y_1) \rightarrow y_2=\frac{x^2}{2}e^x \rightarrow y_h=c_1e^x+c_2\left(\frac{1}{2}x^2e^x\right)$$

مثال (۶) اولاً نشان دهید $y=\sin x^2$ یک جواب معادله $xy''-y'+4x^3y=0$ است. سپس جواب عمومی معادله را بیابید.

$$y=\sin x^2 \rightarrow y'=2x\cos x^2 \rightarrow y''=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} x(2\cos x^2-4x^2\sin x^2)-2x\cos x^2+4x^3\sin x^2=0$$

$$2x\cos x^2-4x^3\sin x^2-2x\cos x^2+4x^3\sin x^2=0 \rightarrow 0=0$$

$$y''-\frac{1}{x}y'+4x^2y=0 \rightarrow V(x)=\int\frac{1}{\sin^2 x^2}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx=\int x\csc^2 x^2dx$$

$$V(x)=-\frac{1}{2}\cot x^2 \;\rightarrow\; y_2=V(x)y_1=-\frac{1}{2}\cot x^2\left(\sin x^2\right)=-\frac{1}{2}\cos x^2$$

$$y_g=c_1\sin x^2+c_2\cos x^2$$

۳-۳-۲-۱- تمرین :

(۱) معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \left(x^2-1\right)y''-2xy'+2y=0 \qquad 2)\ (x-1)y''-xy'+y=0$$

$$3)\ (2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0 \qquad 4)\ x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$$

(۲) نشان دهید در معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

الف) اگر $1-p(x)+q(x)=0$ باشد $y_1=e^{-x}$

ب) اگر $p(x)+xq(x)=0$ باشد $y_1=x$

(۳) معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ x(x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0 \qquad \rightarrow \qquad y_1=x^2$$

$$2)\ y''+y'+e^{-2x}y=0 \qquad \rightarrow \qquad y_1=\cos\left(e^{-x}\right)$$

$$3)\ xy''+2y'+xy=0 \qquad \rightarrow \qquad y_1=\frac{\cos x}{x}$$

$$4)\ x^4y''+2x^3y'+y=0 \qquad \rightarrow \qquad y_1=\sin\frac{1}{x}$$

$$5)\ x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0 \qquad \rightarrow \qquad y_1=\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad x>0$$

$$6)\ x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0 \qquad \rightarrow \qquad y_1=x$$

۳-۳-۳- فرم نرمال معادله مرتبه دوم

همان طور که ملاحظه شد حدس زدن یک جواب معادله همواره میسر نیست مگر در حالات خاص. اما در بسیاری از موارد می توان با قرار دادن $y=uv$ درمعادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ ، معادله را به $v''+f(x)v=0$ تبدیل کرد که به آن فرم نرمال معادله مرتبه دوم می گویند، سپس معادله را حل می کنیم.

$$y=uv \;\rightarrow\; y'=u'v+v'u \;\rightarrow\; y''=u''v+v''u+2v'u'$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} u''v+v''u+2v'u'+p(x)(u'v+v'u)+q(x)uv=0$$

$$\rightarrow\; uv''+(2u'+p(x)u)v'+(u''+p(x)u'+q(x)u)v=0$$

با صفر قرار دادن ضریب v' تابع u حاصل می شود.

$$2u'+p(x)u=0 \rightarrow \int\frac{u'(x)}{u(x)}=\int-\frac{1}{2}p(x) \rightarrow u(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

با قرار دادن $u(x)$ در معادله داریم :

$$e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}v''+\left\{\left(-\frac{1}{2}p'(x)+\frac{1}{4}p^2(x)\right)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}-\frac{1}{2}p^2(x)\times\quad e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}+q(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}\right\}v=0$$

$$v''-\frac{1}{2}\left(p'(x)+\frac{1}{2}p^2(x)-q(x)\right)v=0$$

در نتیجه می توان با تغییر متغیر $y=ve^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را به صورت نرمال درآورد.

مثال (۷) معادله دیفرانسیل $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$ را حل کنید.

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{x^2+2}{x^2}y=0$$

$$\rightarrow\quad y=ve^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}\quad\rightarrow\quad y=ve^{\frac{1}{2}\int\frac{2}{x}dx}\quad\rightarrow\quad y=ve^{\ln x}$$

$$\rightarrow\quad y=v\cdot x\quad\rightarrow\quad y'=v'x+v\quad\rightarrow\quad y''=v''x+2v'$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}}\quad v''x+2v'-\frac{2}{x}(v'x+v)+\left(1+\frac{2}{x^2}\right)v\cdot x=0$$

$$\rightarrow\quad v''x+2v'-2v'-\frac{2}{x}v+vx+\frac{2}{x}v=0$$

$$\rightarrow\quad v''+v=0\quad\rightarrow\quad m^2+1=0\quad\rightarrow\quad m=\pm i$$

$$V(x)=c_1\sin x+c_2\cos x\ \rightarrow\ y=vx\ \rightarrow\ y=x(c_1\sin x+c_2\cos x)$$

۳-۳-۳-۱- تمرین : نشان دهید که تغییر متغیر $y=e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}z(x)$ معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را به معادله $z''(x)+\left(q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right)z(x)=0$ تبدیل می کند. سپس معادله $4x^2y''+4xy'+(x^2-1)y=0$ را حل کنید.

۳-۳-۴- روش (۳) حل معادله دیفرانسیل همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ به کمک تغییر متغیر

برخی از معادلات با تغییر متغیر خاصی تبدیل به معادله ای با ضرایب ثابت می شوند که قابل حل اند.

نکته : اگر در معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ $(q(x)>0)$ حاصل کسر $\frac{q'+2pq}{q^{3/2}}$ عددی ثابت باشد می توان معادله را با تغییر متغیر $z=\int\sqrt{q(x)}dx$ به یک معادله همگن با ضرایب ثابت تبدیل کرد.

مثال(۸) جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y''+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)y'+xy=0$$

چون $$\frac{q'+2pq}{q^{3/2}}=\frac{1+2\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)x}{x^{3/2}}=1$$

$$z=\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\ \rightarrow\ \frac{dz}{dx}=\sqrt{x}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\sqrt{x}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\sqrt{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d}{dz}\frac{dz}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}\ \rightarrow\ y''=x\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}}\ x\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dz}\sqrt{x}+xy=0$$

$$\rightarrow\ x\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{2}x\frac{dy}{dz}+xy=0\ \xrightarrow{\times 2}2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+2y=0$$

معادله ای با ضرایب ثابت برحسب z

$$2m^2+m+2=0\ \rightarrow\ \Delta=-15\ \rightarrow\ m=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}i$$

$$y_g=e^{-\frac{1}{4}z}\left(c_1\sin\frac{\sqrt{15}}{4}z+c_2\cos\frac{\sqrt{15}}{4}z\right)$$ برحسب Z $\xrightarrow{z=\frac{2}{3}x^{3/2}}$

$$y_g=e^{-\frac{1}{6}x^{3/2}}\left(c_1\sin\frac{\sqrt{15}}{4}x^{3/2}+c_2\cos\frac{\sqrt{15}}{4}x^{3/2}\right)$$ جواب نهایی برحسب x

مثال (۹) معادله زیر را حل کنید.

$$y''-\frac{1}{2\sqrt{x}}y'+e^{2\sqrt{x}}y=0\ \rightarrow\ \frac{q'+2pq}{q^{3/2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}e^{2\sqrt{x}}+2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{2\sqrt{x}}}{e^{3\sqrt{x}}}=0$$

$$z=\int\sqrt{e^{2\sqrt{x}}}dx=\int e^{\sqrt{x}}dx \rightarrow \frac{dz}{dx}=e^{\sqrt{x}}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\sqrt{x}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}e^{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d}{dz}\frac{dz}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\frac{dy}{dz} \rightarrow y''=\frac{d^2y}{dz^2}e^{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}}\frac{d^2y}{dz^2}e^{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dz}e^{\sqrt{x}}+e^{2\sqrt{x}}y=0$$

$$\rightarrow e^{2\sqrt{x}}\left(\frac{d^2y}{dz^2}+y\right)=0 \xrightarrow{e^{2\sqrt{x}}\neq 0}\frac{d^2y}{dz^2}+y=0$$

$$m^2+1=0 \rightarrow m=\pm i \rightarrow y_h=e^{0z}(c_1\sin z+c_2\cos z)$$

$$y_h=c_1\sin\int e^{\sqrt{x}}dx+c_2\cos\int e^{\sqrt{x}}dx$$

مثال (۱۰) ثابت کنید اگر در معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ که $(q(x)>0)$ حاصل کسر $\frac{q'+2pq}{q^{3/2}}$ عددی ثابت باشد می توان معادله را با تغییر متغیر $z=\int\sqrt{q(x)}dx$ به یک معادله همگن با ضرایب ثابت تبدیل کرد.

$$z=\int\sqrt{q(x)}dx \rightarrow \frac{dz}{dx}=\sqrt{q(x)}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\sqrt{q(x)} \qquad (1)$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\sqrt{q(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\sqrt{q(x)}+\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d}{dz}\frac{dz}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\sqrt{q(x)}+\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dz^2}q(x)+\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}\frac{dy}{dz} \qquad (2)$$

جایگذاری رابطه (1) و (2) در معادله :

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}q(x)+\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}\frac{dy}{dz}+p(x)\frac{dy}{dz}\sqrt{q(x)}+q(x)y=0$$

$$\frac{2q^{3/2}(x)\frac{d^2y}{dz^2}+\left(q'(x)+2p(x)q(x)\right)\frac{dy}{dz}+2q^{3/2}(x)y}{2\sqrt{q(x)}}=0$$

$$q(x)\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{q'(x)+2p(x)q(x)}{2\sqrt{q(x)}}\right)\frac{dy}{dz}+q(x)y=0$$

$$\xrightarrow{\div q(x)}\quad 2\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{q'(x)+2p(x)q(x)}{q^{3/2}(x)}\right)\frac{dy}{dz}+2y=0$$

ثابت شد چون $\frac{q'+2pq}{q^{3/2}}$ فرض مسئله است که عددی ثابت است.

۳-۳-۴-۱- تمرین :

(۱) معادلات زیر را با تغییر متغیر داده شده حل کنید.

1) $xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{x^2}{2}$

2) $y''+(e^x-1)y'+e^{2x}y=0 \quad \rightarrow \quad z=e^x$

3) $xy''+(kx^{n+1}-n)y'+x^{2n+1}y=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

4) $x^4y''+2x^3y'-4y=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{1}{x}$

(۲) معادله زیر را با تغییر متغیر مناسب به معادله ای با ضرایب ثابت تبدیل کنید. سپس معادله را حل کنید.

$$y''+3xy'+x^3y=0$$

۳-۳-۵- روش (۴) برای حل معادلات خطی مرتبه دوم همگن. معادلات کوشی اویلر یا هم بعد است، این روش حالت خاص از روش سوم است.

فرم کلی معادلات کوشی اویلر بصورت زیر است :

$$(ax+b)^2y''+p(ax+b)y'+qy=0$$ (p و q عدد ثابت)

این معادله به کمک تغییر متغیر $ax+b=e^z$ یا $z=\ln(ax+b)$ به معادله ای با ضرایب ثابت تبدیل می شود.

$$\left(\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{p}{a}-1\right)\frac{dy}{dz}+\frac{q}{a^2}y=0\right)$$ فرمول (I)

حالت خاصی از این معادله به فرم زیر است :

$$x^2y''+pxy'+qy=0\quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \quad \xrightarrow[z=\ln x]{x=e^z}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(p-1)\frac{dy}{dz}+qy=0$$ فرمول (II)

مثال (۱۱) اثبات کنید معادله کوشی اویلر $(ax+b)^2y''+p(ax+b)y'+qy=0$ با تغییر متغیر $\begin{cases} ax+b=e^z \\ z=\ln(ax+b)\end{cases}$ تبدیل به معادله ای با ضرایب ثابت می شود.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{a}{ax+b}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\frac{a}{ax+b}\right)\ \rightarrow\ y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{a}{ax+b}-\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}\frac{a}{ax+b}-\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{dy}{dz}\ \rightarrow\ y''=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{dy}{dz}$$

با جایگذاری y و y' در معادله خواهیم داشت :

$$\rightarrow\ (ax+b)^2\left(\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{dy}{dz}\right)+p\,(ax+b)\frac{dy}{dz}\frac{a}{ax+b}+qy=0$$

$$\rightarrow\ a^2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}(pa-a^2)+qy=0\ \xrightarrow{\div a^2}\ \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}\left(\frac{p}{a}-1\right)+\frac{q}{a^2}y=0$$

معادله فوق، معادله ای با ضرایب ثابت (برحسب z نه x) است.

نکته : به دلیل اینکه حالت کلی را اثبات کردیم در مثال ها فقط از فرمول آخر استفاده می کنیم.

مثال (۱۲) معادلات زیر را حل کنید.

1) $(x+1)^2y''+(x+1)y'+y=0\ \rightarrow\ \begin{cases} x+1=e^z \\ z=\ln(x+1)\end{cases}$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{1}{1}-1\right)\frac{dy}{dz}+\frac{1}{1}y=0$$ فرمول (I)

$$\frac{d^2y}{dz^2}+y=0\ \rightarrow\ m^2+1=0\ \rightarrow\ m=\pm i\ \rightarrow$$

$$y_g=c_1\sin z+c_2\cos z\rightarrow\ y_g=c_1\sin(\ln(x+1))+c_2\cos(\ln(x+1))$$

$$2)\ x^2y''+6xy'+6y=0 \ \rightarrow \begin{cases} x=e^z \\ z=\ln x \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(6-1)\frac{dy}{dz}+6y=0$$ فرمول (II)

$$\frac{d^2y}{dz^2}+5\frac{dy}{dz}+6y=0 \ \rightarrow \ m^2+5m+6=0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1=-2 \\ m_2=-3 \end{cases} \rightarrow \ y_g=c_1e^{-2z}+c_2e^{-3z} \ \rightarrow \ y_g=c_1x^{-2}+c_2x^{-3}$$

$$3)\ \left(4x^2+4x+1\right)y''+(8x+4)y'-24y=0$$

$$(2x+1)^2y''+4(2x+1)y'-24y=0 \ \rightarrow \begin{cases} 2x+1=e^z \\ z=\ln(2x+1) \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{4}{2}-1\right)\frac{dy}{dz}-\frac{24}{4}y=0$$ فرمول (I)

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}-6y=0 \ \rightarrow \ m^2+m-6=0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1=-3 \\ m_2=+2 \end{cases} \rightarrow \ y_g=c_1e^{-3z}+c_2e^{+2z} \ \rightarrow \ y_g=c_1(2x+1)^{-3}+c_2(2x+1)^{+2}$$

۳-۳-۶- روش (۵) برای حل معادلات مرتبه دوم همگن : معادلات دیفرانسیل خطی کامل

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$ را کامل گوییم هر گاه $f_1''(x)-f_2'(x)+f_3(x)=0$ باشد در این صورت می توان به جای معادله بالا از فرمول $\frac{d}{dx}\left[f_1(x)y'+\left[f_2(x)-f_1'(x)\right]y\right]=0$ استفاده کرد که معادله مرتبه اول است.

مثال (۱۳) معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \sin x\, y''-\cos x\, y'+2\sin x\, y=0$$

معادله کامل است. $\rightarrow \ -\sin x-\sin x+2\sin x=0$

$$\frac{d}{dx}\left((\sin x)y'+(-\cos x-\cos x)y\right)=0 \ \xrightarrow{\int dx} \ \sin x\, y'-2\cos x\, y=c_1$$

$$y' - 2\frac{\cos x}{\sin x}y = \frac{c_1}{\sin x}$$ معادله خطی مرتبه اول

$$y = e^{2\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}\left(\int\frac{c_1}{\sin x}e^{-2\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}dx + c_2\right) \rightarrow y = e^{2\ln|\sin x|}\left(\int\frac{c_1}{\sin x}e^{-2\ln|\sin x|}dx + c_2\right)$$

$$y = \sin^2 x(\int\frac{c_1}{\sin^3 x}dx + c_2)$$

$$\rightarrow \quad y = \sin^2 x\left[c_1\left(-\frac{1}{2}\csc x\cot x - \frac{1}{2}\ln|\csc x + \cot x| + c_2\right)\right] \rightarrow$$

2) $x y'' - (\cos x)y' + (\sin x)y = 0 \quad \rightarrow \quad f_1'' - f_2' + f_3 = 0$

معادله کامل است. $\rightarrow \quad 0 - \sin x + \sin x = 0$

$$\frac{d}{dx}[x y' - (\cos x + 1)y] = 0 \quad \xrightarrow{\int dx} \quad x y' - (\cos x + 1)y = c_1$$

$$y' - \left(\frac{\cos x + 1}{x}\right)y = \frac{c_1}{x}$$ معادله خطی مرتبه اول

$$y = e^{\int\frac{\cos x+1}{x}dx}\left(\int\frac{c_1}{x}e^{-\int\frac{\cos x+1}{x}dx}dx + c_2\right)$$

انتگرال این مساله قابل حل نیست.

۳-۲-۳-۵-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $(x^2 - 2x)y'' + 4(x-1)y' + 2y = 0$

2) $(x^2 + 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$

3) $y'' + xy' + y = 0$

4) $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$

۳-۴- معادلات خطی مرتبه بالاتر همگن با ضرایب ثابت

تمام قضایا و تعاریف بیان شده برای معادله همگن مرتبه دو با ضرایب ثابت را می توان به معادله مرتبه n همگن با ضرایب ثابت تعمیم داد.

تعریف : رونسکین توابع $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه : توابع $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ که جواب های معادله مرتبه n همگن اند، را مستقل خطی گوییم اگر و تنها اگر
$$W(y_1 , y_2 , y_3 , \dots , y_n) \neq 0$$

توابع $\cos x$ و $\sin x$ و x را مستقل خطی گوییم زیرا :

$$W(x , \sin x , \cos x) = \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -x + 1 \neq 0$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام همگن با ضرایب ثابت را بصورت زیر نشان می دهیم :

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

معادله مشخصه دیفرانسیل به صورت زیر است و حالات ریشه های آن را در زیر بیان می کنیم.

$$m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

نکته : به جای متغیر m در بعضی از کتب، از متغیر r و t و ... نیز استفاده می کنند.

حالت الف) اگر معادله مشخصه شامل ریشه های حقیقی و متمایز $m_1 , m_2 , \dots , m_n$ باشد در این صورت جواب های مستقل خطی معادله به فرم $y_1 = e^{m_1 x}$ و $y_2 = e^{m_2 x}$ و ... $y_n = e^{m_n x}$ است و جواب عمومی معادله ترکیب خطی این جواب هاست.

$$y_g = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

حالت ب) اگر m_1 ریشه حقیقی و تکراری از مرتبه m معادله مشخصه باشد در این صورت $y_1 = e^{m_1 x}$ و $y_2 = x e^{m_1 x}$ و ... $y_m = x^{n-1} e^{m_1 x}$ خواهد بود و جواب عمومی معادله بصورت زیر خواهد بود :

$$y_g = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + \cdots + c_{m-1} x^{m-1} e^{m_1 x}$$

نکته مهم : جواب های مستقل خطی معادله دیفرانسیل به ازای ریشه های تکراری هستند.

حالت پ) اگر $a_1 \pm b_1 i$ و $a_2 \pm b_2 i$ و $a_n \pm b_n i$ و ... جواب های مختلط مزدوج معادله مشخصه باشند در این صورت

داریم : $\begin{cases} y_1 = e^{a_1 x} \sin b_1 x \\ y_2 = e^{a_1 x} \cos b_1 x \end{cases}$ و $\begin{cases} y_3 = e^{a_2 x} \sin b_2 x \\ y_4 = e^{a_2 x} \cos b_2 x \end{cases}$ و.... $\begin{cases} y_{2n-1} = e^{a_n x} \sin b_n x \\ y_{2n} = e^{a_n x} \cos b_n x \end{cases}$ و

$$y_g = e^{a_1 x}(c_1 \sin b_1 x + c_2 \cos b_1 x) + e^{a_2 x}(c_3 \sin b_2 x + c_4 \cos b_2 x) + \cdots$$

خواهد بود.

نکته : در صورتی که ریشه های معادله مشخصه تلفیقی از سه حالت فوق باشند ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن به صورت ترکیب خطی جواب های مستقل خطی حالت های وابسته می باشند.

مثال (۱۴) جواب عمومی معادله های زیر را بیابید.

$$1)\ y^{(3)}+5y''+6y'=0 \ \rightarrow\ m^3+5m^2+6m=0 \ \rightarrow$$

$$m(m^2+5m+6)=0 \ \rightarrow\ m_1=0\,,\, m_2=-2\,,\, m_3=-3$$

$$\rightarrow y_g=c_1e^{0x}+c_2\,e^{-2x}+c_3e^{-3x} \ \rightarrow\ y_g=c_1+c_2\,e^{-2x}+c_3e^{-3x}$$

$$2)\ y^{(4)}-16y=0 \ \rightarrow\ m^4-16=0 \ \rightarrow$$

$$(m^2-4)(m^2+4)=0 \ \rightarrow\ m=\pm 2i\,,\, m=\pm 2$$

$$\rightarrow\ y_g=c_1e^{2x}+c_2\,e^{-2x}+c_3\sin 2x+c_4^{*}\cos 2x$$

$$3)\ y'''-3y''+3y'-y=0 \ \rightarrow\ m^3-3m^2+3m-1=0 \ \rightarrow$$

$(m-1)^3=0 \ \rightarrow\ m=1$ سه بار تکرار

$$\rightarrow\ y_g=c_1e^x+c_2x\,e^x+c_3x^2e^x$$

$$4)\ y^{(5)}+4y^{(3)}+4y'=0 \ \rightarrow\ m^5+4m^3+4m=0 \ \rightarrow$$

$$m\,(m^4+4m^2+4)=0 \ \rightarrow\ m(m^2+2)^2=0$$

$m=0 \ \rightarrow\ e^{0x}=1 \quad , \quad m=\pm\sqrt{2}i$ ۲ بار تکرار

$$y_g=c_1+c_2\sin\sqrt{2}\,x+c_3\cos\sqrt{2}\,x+c_4x\sin\sqrt{2}\,x+c_5x\cos\sqrt{2}\,x$$

۳-۵- عملگر مشتق

با جایگذاری $\frac{d}{dx}=D$ در هر معادله می توان شکل عملگری معادله را بدست آورد. با استفاده از این شکل جدید می توان تجزیه معادله مشخصه را در صورت لزوم بیان کرد.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(y)=D_y \quad , \quad y''=\frac{d^2}{dx^2}(y)=D_y^2 \quad , \ y^{(n)}=\frac{d^n}{dx^n}y=D_y^n$$

مثال (۱۵) جواب عمومی معادله $D^2(D^2-1)(D^2+D+1)y=0$ را بیابید.

$r^2(r^2-1)(r^2+r+1)=0 \ \rightarrow\ r=0$ ۲ بار تکرار

$$r=\pm 1 \quad , \quad r=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_g=c_1+c_2\,x+c_3e^x+c_4e^{-x}+c_5e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_6e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

مثال (۱۶) جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیرا را بیابید.

$$(D^2+D)^2(D^2+4)(D^2-2D+5)y=0 \quad \rightarrow \quad (r(r+1))^2(r^2+4)(r^2-2r+5)=0$$

$r=0$ ۲ بار تکرار $r=\pm 2i$

$r=-1$ ۲ بار تکرار $r=+1\pm 2i$

$$y_g=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}+c_5\sin 2x+c_6\cos 2x+c_7e^x\sin 2x+c_8e^x\cos 2x$$

۳-۵-۱- تمرین : جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

1) $D^2(D-1)^3(D^2+4)^2(D^2+2D+2)(D^2-1)y=0$

2) $y^{(6)}+16y^{(4)}+16y^{(3)}=0$

3) $y^{(4)}+2y'''+2y''=0$

4) $(D^2+16)(D^2-16)(D+16)(D-16)y=0$

۳-۶- معادلات دیفرانسیل خطی غیر همگن از مرتبه n ام

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت غیر همگن به صورت زیر است :

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=R(x)$$

جواب عمومی معادله بالا برابر است با $y=y_g+y_p$. روش یافتن y_g بیان شده (y_g جواب عمومی معادله همگن نظیر) حال روش های بدست آوردن y_p (جواب خصوصی) را یاد می گیریم.

برای یافتن جواب خصوصی y_p در اینجا دو روش بیان می شود. روش اول ضرایب نامعین و روش دوم روش تغییر پارامترها است.

۳-۶-۱- روش ضرایب نامعین برای محاسبه y_p

این روش دو مورد محدودیت دارد :

الف) باید ضرایب معادله ثابت باشند.

ب) $R(x)$ از ۴ حالات زیر باید باشد.

مزیت این روش این است که برای یافتن y_p نیازی به انتگرال گیری نیست(فقط نیاز به مشتق است) برای محاسبه ضرایب نامعین در y_p کافیست y_p و مشتقاتش را در معادله ناهمگن صدق دهید تا ضرایب نامعین بدست آیند.

حالت اول : اگر $R(x)=p_n(x)$ باشد $p_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه n است در این صورت داریم :

$y_p=x^s$ (n یک چند جمله ای کامل از درجه)

s : تعداد ریشه های صفر معادله مشخصه است.

مثال (۱۷) فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید (محاسبه ضرایب نیاز نیست)

1) $y''+2y'=x^2-3$

$y''+2y'=0 \rightarrow m^2+2m=0 \rightarrow (m_1=0 \quad , \quad m_2=-2)$

$y_p=x^1(A_1x^2+A_2x+A_3)$

2) $y''+4y=2x-1$

$y''+4y=0 \rightarrow m=\pm 2i \rightarrow y_p=x^0(A_1x+A_2)=A_1x+A_2$

3) $D^2(D-4)y=3$

$m^2(m-4)=0$

$m=0$ ۲ بار تکرار $\quad m=4 \quad \rightarrow y_p=x^2(A_1)$

مثال (۱۸) جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$y''+y'=x-2$

$\rightarrow y''+y'=0 \rightarrow m^2+m=0 \rightarrow m_1=-1 \quad , \quad m_2=0 \rightarrow y_g=c_1e^{-x}+c_2$

$y_p=x^1(Ax+B) \rightarrow =Ax^2+Bx \rightarrow y'_p=2Ax+B$

$$y''_p=2A \xrightarrow{\text{در معادله}} 2A+(2Ax+B)=x-2 \rightarrow \begin{cases} 2A=1 \rightarrow A=\frac{1}{2} \\ 2A+B=-2 \rightarrow B=-3 \end{cases}$$

$y_p=\frac{1}{2}x^2-3x \rightarrow y=y_p+y_g=\frac{1}{2}x^2-3x+c_1e^{-x}+c_2$

حالت دوم : اگر $R(x)=p_n(x)e^{ax}$ باشد یعنی ضرب یک چند جمله ای از درجه n در e^{ax} :

$y_p=$ (یک چند جمله ای کامل از درجه n) $e^{ax}x^s$

s : تعداد ریشه های برابر a معادله مشخصه است.

مثال (۱۹) فقط فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید. (محاسبه ضرایب الزامی نیست).

1) $y''+5y'+6y=xe^{-2x}$

$y''+5y'+6y=0 \rightarrow m^2+5m+6=0 \rightarrow m_1=-2 \; , \; m_2=-3$

$y_p=(A_1x+A_2)e^{-2x}x^1$

2) $(D-3)^4 D y = e^{3x}$

$(m-3)^4 m = 0 \rightarrow m_1 = 0 \quad , \quad m_2 = 3$ ۴ بار تکرار $\qquad y_p = A_1 e^{3x} x^4$

3) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 - 3)e^{4x}$

$y'' - 3y' + 2y = 0 \rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \rightarrow m_1 = 1 \; , \; m_2 = 2$

$y_p = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^{4x} x^0$

مثال (۲۰) جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$y'' - 4y' = 2x e^{4x}$

$y'' - 4y' = 0 \rightarrow m^2 - 4m = 0 \quad m_1 = 4 \; , \; m_2 = 0 \rightarrow y_g = c_1 e^{4x} + c_2$

$y_p = (A_1 x + A_2) e^{4x} x^1 = (A_1 x^2 + A_2 x) e^{4x}$

$y_p' = (2A_1 x + A_2) e^{4x} + 4 e^{4x} (A_1 x^2 + A_2 x) = e^{4x} (4A_1 x^2 + 2A_1 x + 4A_2 x + A_2)$

$y_p'' = 4 e^{4x} (4A_1 x^2 + 2A_1 x + 4A_2 x + A_2) + e^{4x} (8A_1 x + 2A_1 + 4A_2)$

با جایگذاری در معادله داریم :

$e^{4x} (16A_1 x^2 + 16A_1 x + 16A_2 x + 8A_2 + 2A_1) - 4e^{4x} (4A_1 x^2 + 2A_1 x + 4A_2 x + A_2) = 2x e^{4x}$

$e^{4x} (8A_1) x + e^{4x} (2A_1 + 4A_2) = 2x e^{4x}$

$$\begin{cases} 8A_1 = 2 \rightarrow A_1 = \dfrac{1}{4} \\ 2A_1 + 4A_2 = 0 \rightarrow A_2 = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$y_p = \left(\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}x\right) e^{4x} \rightarrow y = y_p + y_g = \left(\dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{8}x\right) e^{4x} + c_1 e^{4x} + c_2$

حالت سوم : اگر طرف دوم به فرم $R(x) = M(x)\cos bx \pm N(x)\sin bx$ که M و N دو چند جمله ای اند آنگاه داریم :

$y_p = [A(x)\sin bx + B(x)\cos bx] x^s$

s : تعداد ریشه های برابر $\pm bi$ معادله مشخصه است :

$A(x)$ و $B(x)$ دو چند جمله ای مختلف کامل از درجه n می باشند که n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ می باشد.

مثال (۲۱) فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید (محاسبه ضرایب نیاز نیست)

1) $y''+3y'=x\sin 3x+\cos 3x$

$y''+3y'=0 \;\rightarrow\; m^2+3m=0 \;\rightarrow\; m_1=-3\ ,\ m_2=0$

$y_p=x^0[(A_1x+A_2)\sin 3x+(A_3x+A_4)\cos 3x]$

2) $y''+4y=2x\cos 2x$

$y''+4y=0 \;\rightarrow\; m^2+4=0 \;\rightarrow\; m=\pm 2i$

$y_p=x^1[(A_1x+A_2)\sin 2x+(A_3x+A_4)\cos 2x]$

3) $(D^2+9)^2(D^2-4)y=3\sin 3x$

$(m^2+9)^2(m^2-4)=0 \;\rightarrow\; m=\pm 2\ ,\ m=\pm 3i$ دو بار تکرار

$y_p=x^2[A_1\sin 3x+A_2\cos 3x]$

مثال (۲۲) جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$y''+y=\cos x$

$y''+y=0 \;\rightarrow\; m^2+1=0 \;\rightarrow\; m=\pm i$

$y_g=c_1\sin x+c_2\cos x$

$y_p=[A_1\sin x+A_2\cos x]x^1=A_1x\sin x+A_2x\cos x$

$y'_p=A_1\sin x+A_1x\cos x+A_2\cos x-A_2x\sin x$

$y''_p=A_1\cos x+A_1\cos x-A_1x\sin x-A_2\sin x-A_2\sin x-A_2x\cos x$

$y''_p=2A_1\cos x-2A_1\sin x-A_1x\sin x-A_2x\cos x$

با جایگذاری در معادله داریم :

$2A_1\cos x-2A_2\sin x-A_1x\sin x-A_2x\cos x+A_1x\sin x+A_2x\cos x=\cos x$

$$\rightarrow 2A_1\cos x-2A_2\sin x=\cos x \;\rightarrow \begin{cases} 2A_1=1 \;\rightarrow\; A_1=\dfrac{1}{2} \\ -2A_2=0 \;\rightarrow\; A_2=0 \end{cases}$$

$y_p=\frac{1}{2}x\sin x \;\rightarrow\; y=y_p+y_g=\frac{1}{2}x\sin x+c_1\sin x+c_2\cos x$

حالت چهارم : اگر $R(x)=e^{ax}\left(M(x)\cos bx \overset{or}{\pm} N(x)\sin bx\right)$ باشد که M و N دو چند جمله ای اند. آنگاه داریم :

$$y_p=[A(x)\sin bx+B(x)\cos bx]\,e^{ax}x^s$$

s : تعداد ریشه های برابر $a\pm bi$ معادله مشخصه (a توان e و b کمان سینوس و کسینوس است) که $A(x)$ و $B(x)$ دو چند جمله ای مختلف کامل از درجه n می باشند که n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ می باشد.

مثال (۲۳) فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید (محاسبه ضرایب الزامی نیست).

1) $y''+4y'+5y=2e^{-2x}\cos x$

$$y''+4y'+5y=0 \;\rightarrow\; m^2+4m+5=0 \;\rightarrow\; m=-2\pm i$$

$$y_p=[A_1\sin x+A_2\cos x]\,e^{-2x}x^1$$

x^1 : چون $-2\pm i$ ریشه معادله مشخصه هست.

2) $(D^2-1)(D^2+4)y=2x\,e^x\sin 2x+3e^x\cos 2x$

$$(r^2-1)(r^2+4)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} r^2-1=0 \;\rightarrow\; r=\pm 1 \\ r^2+4=0 \;\rightarrow\; r=\pm 2i \end{cases}$$

$$y_p=[(A_1x+A_2)\sin 2x+(A_3x+A_4)\cos 2x]e^x x^0$$

x^0 : چون $1\pm 2i$ ریشه معادله مشخصه نیست.

3) $y'''-2y''+2y'=x^2e^{2x}\sin x+3x\,e^{2x}\cos x$

$$y'''-2y''+2y'=0 \;\rightarrow\; r(r^2-2r+2)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} r=0 \\ r=1\pm i \end{cases}$$

$$y_p=[(A_1x^2+A_2x+A_3)\sin x+(A_4x^2+A_5x+A_6)\cos x]\;e^{2x}x^0$$

x^0 : چون $2\pm i$ ریشه معادله مشخصه نیست.

مثال (۲۴) جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y''+4y'+5y=4e^{-2x}\sin x$$

$$y''+4y'+5y=0 \;\rightarrow\; m^2+4m+5=0 \;\rightarrow\; m=-2\pm i$$

$$y_g=e^{-2x}(c_1\sin x+c_2\cos x)$$

$$y_p=[A\sin x+B\cos x]e^{-2x}x^1=(A\,x\sin x+B\,x\cos x)e^{-2x}$$

$$y'_p = (A\sin x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\sin x)e^{-2x} - 2e^{-2x}(Ax\sin x + Bx\cos x)$$

$$y'_p = (A\sin x + B\cos x + (A-2B)x\cos x + (-B-2A)x\sin x)e^{-2x}$$

y''_p را نیز محاسبه می کنیم و در معادله قرار می دهیم که نتیجه آن عبارت زیر می شود :

$$y''_p + 4y'_p + 5y_p = 4e^{-2x}\sin x \rightarrow -2Be^{-2x}\sin x + 2Ae^{-2x}\cos x = 4e^{-2x}\sin x$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2B = 4 \rightarrow B = -2 \\ 2A = 0 \rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$y_p = -2xe^{-2x}\cos x$$

$$y = y_p + y_g = -2xe^{-2x}\cos x + c_1e^{-2x}\sin x + c_2e^{-2x}\cos x$$

مثال (۲۵) جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$(4x^2+4x+1)y'' + (8x+4)y' - 24y = \ln(2x+1)$$

$$(2x+1)^2y'' + 4(2x+1)y' - 24y = \ln(2x+1)$$ کوشی اویلر :

$$\begin{cases} 2x+1 = e^z \\ z = \ln(2x+1) \end{cases} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{4}{2}-1\right)\frac{dy}{dz} - \frac{24}{4}y = z$$ معادله برحسب z

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} - 6y = 0 \rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \rightarrow m_1 = -3 \quad , \quad m_2 = 2$$

$$y_g = c_1e^{-3z} + c_2e^{2z}$$

$$y_p = Az + B \rightarrow y'_p = A \rightarrow y''_p = 0$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} 0 + A - 6(Az+B) = z \rightarrow \begin{cases} -6A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{6} \\ A - 6B = 0 \rightarrow B = -\frac{1}{36} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{6}z - \frac{1}{36} \rightarrow y = y_p + y_g = c_1e^{-3z} + c_2e^{2z} - \frac{1}{6}z - \frac{1}{36}$$

$$\rightarrow y = c_1(2x+1)^{-3} + c_2(2x+1)^2 - \frac{1}{6}(\ln(2x+1)) - \frac{1}{36}$$

۳-۶-۱-۱- تمرین : جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

1) $y''-9y=e^{3x}$

2) $y''-4y'+5y=(x+2)e^{2x}\sin x$

3) $y''+y'=2\cos 2x+x\sin 2x$

4) $y''+4y=x^2\sin 2x$

5) $y''+y=6e^x+6\sin x$

۳-۶-۲- اصل برهم نهی جواب ها (روش انطباق) :

برای پیدا کردن جواب عمومی معادله

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=R_1(x)+R_2(x)+\cdots+R_m(x)$$

اگر y_g جواب عمومی معادله همگن باشد و y_{p_i} جواب خصوصی متناظر معادله

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=R_i(x)$$

باشد در این صورت $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+\cdots+y_{p_m}$ جواب خصوصی و جواب عمومی آن بصورت $y=y_p+y_g$ است.

(یعنی به ازای هر $R(x)$ یک y_p محاسبه می کنیم و سپس آنها را با هم جمع می کنیم).

مثال (۲۶) فرم جواب خصوصی معادله زیر را بیابید؟ (محاسبه ضرایب نیاز نیست).

$$y^{(4)}+4y^{(3)}=3\sin x+5e^x+x^2+e^{-x}$$

$y^{(4)}+4y^{(3)}=0 \;\rightarrow\; m^4+4m^3=0 \;\rightarrow\; m=-4,\; m=0$ ۳ بار تکرار

$R_1(x)=3\sin x \qquad R_2(x)=5e^x \qquad R_3(x)=x^2 \qquad R_4(x)=e^{-x}$

$$y_{p_1}=[A_1\sin x+A_2\cos x]x^0$$

$$y_{p_2}=x^0A_3e^x \quad , \quad y_{p_3}=[A_4x^2+A_5x+A_6]\;x^3 \quad , \quad y_{p_4}=x^0A_7e^{-x}$$

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}$$

نکته : اگر در $R(x)$ عباراتی همچون $\sinh x$ یا $\cosh x$ یا $\sin^2 x$ یا $\cos^2 x$ یا $\sin\alpha\cos\beta$ یا $\sin\alpha\sin\beta$ یا $\cos\alpha\cos\beta$ ظاهر شد باید به حالات ۴ گانه تبدیل کنیم.

$$\sinh u=\frac{e^u-e^{-u}}{2} \qquad \cosh u=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$$

$$\sin^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{-1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

مثال (۲۷) فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید. (محاسبه ضرایب الزامی نیست)

1) $(D-1)D^3(D^2+4)y=x\sinh x+x^2+x+3+\sin^2 x+x\sin x$

$(D-1)D^3(D^2+4)y=0 \quad\rightarrow\quad r=1\,,\, r=\pm 2i\,,\, r=0$ ۳ بار تکرار

$$R(x)=x\left(\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}\right)+x^2+x+3+\frac{1-\cos 2x}{2}+x\sin x$$

$$R(x)=\frac{x}{2}e^x-\frac{x}{2}e^{-x}+x^2+x+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+x\sin x$$

$$R_1(x)=\frac{1}{2}xe^x \quad R_2(x)=-\frac{x}{2}e^{-x} \quad R_3(x)=x^2+x+\frac{7}{2}$$

$$R_4(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x \quad R_5(x)=x\sin x$$

$$y_{p_1}=[A_1x+A_2]e^x x^0$$

$$y_{p_2}=(A_3x+A_4)e^{-x}x^0$$

$$y_{p_3}=[A_5x^2+A_6x+A_7]\;x^3$$

$$y_{p_4}=[A_8\cos 2x+A_9\sin 2x]x^1$$

$$y_{p_5}=[(B_1x+B_2)\sin x+(B_3x+B_4)\cos x]x^0$$

$$y_p=y_{p_1}+\cdots+y_{p_5}$$

---

2) $y''-3y'+2y=4\sin x\cos 3x-2\cos^2 2x+\sinh x+2\cosh 2x+1+xe^x$

$y''-3y'+2y=0 \quad\rightarrow\quad m^2-3m+2=0 \quad\rightarrow\quad m_1=1 \quad,\quad m_2=2$

$$R(x)=4\left[\frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x)\right]-2\left[\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]+\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}+e^{2x}+e^{-2x}+1+xe^x$$

$$R(x)=[2\sin 4x-\cos 4x]-2\sin 2x+e^x\left(\frac{1}{2}+x\right)-\frac{1}{2}e^{-x}+e^{2x}+e^{-2x}$$

$$R_1(x)=2\sin 4x-\cos 4x \quad R_2(x)=-2\sin 2x \quad R_3(x)=\left(\frac{1}{2}+x\right)e^x$$

$$R_4(x)=-\frac{1}{2}e^{-x} \quad R_5(x)=e^{2x} \quad R_6(x)=e^{-2x}$$

$$y_{p_1}=[A_1\sin 4x+A_2\cos 4x]x^0 \quad , \quad y_{p_2}=[A_3\sin 2x+A_4\cos 2x]x^0$$

$$y_{p_3}=[A_5x+A_6]\,e^x x^1 \quad , \quad y_{p_4}=A_7e^{-x}x^0 \quad , \quad y_{p_5}=A_8e^{2x}x^1 \quad , \quad y_{p_6}=A_9e^{-2x}x^0$$

$$y_p=y_{p_1}+\cdots+y_{p_6}$$

مثال (۲۸) جواب عمومی معادلات زیر را بیابید. (محاسبه ضرایب نیاز نیست).

1) $y''+2y'+5=x^2e^{-x}\cos 2x+xe^{-x}+3x^2+\sin 2x$

$$y''+2y'+5=0 \;\rightarrow\; m^2+2m+5=0 \;\rightarrow\; m_1=-1\pm 2i$$

$$y_g=e^{-x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$$

$$R_1(x)=x^2e^{-x}\cos 2x \quad R_2(x)=xe^{-x} \quad R_3(x)=3x^2 \quad R_4(x)=\sin 2x$$

$$y_{p_1}=\left[(A_1x^2+A_2x+A_3)\sin 2x+(A_4x^2+A_5x+A_6)\cos 2x\right]\,e^{-x}x^1$$

$$y_{p_2}=[A_7x+A_8]e^{-x}x^0 \quad , \quad y_{p_3}=\left[A_9x^2+A_{10}x+A_{11}\right]\,x^0$$

$$y_{p_4}=[B_1\sin 2x+B_2\cos 2x]x^0$$

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4} \;\rightarrow\; y=y_g+y_p$$

---

2) $y''-3y'+2y=x\sin^2 x+x\cosh x+e^{-x}+\sin 2x$

$$y''-3y'+2y=0 \;\rightarrow\; m^2-3m+2=0 \;\rightarrow\; m_1=1, m_2=2$$

$$y_g=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

$$R(x)=x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)+e^{-x}+\sin 2x$$

$$R(x)=\frac{x}{2}+\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{x}{2}e^x+e^{-x}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

$$y_{p_1}=[A_1x+A_2]x^0$$

$$y_{p_2}=[(A_3x+A_4)\sin 2x+(A_5x+A_6)\cos 2x]\,x^0$$

$$y_{p_3}=[A_7x+A_8]\,e^x x^1 \quad , \quad y_{p_4}=e^{-x}(A_9x+A_{10})x^0$$

$$y_p = y_{p_1} + \cdots + y_{p_4} \quad \to \quad y = y_g + y_p$$

مثال (۲۹) جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y'' + y' = 2\sin x + e^x + x - 1$$

$$y'' + y' = 0 \quad \to \quad m^2 + m = 0 \quad \to \quad m_1 = -1 \ , \ m_2 = 0 \quad \to \quad y_g = c_1 e^{-x} + c_2$$

$$y_p = A_1 \sin x + A_2 \cos x + A_3 e^x + (A_4 x + A_5)x$$

$$y'_p = A_1 \cos x - A_2 \sin x + A_3 e^x + 2A_4 x + A_5$$

$$y''_p = -A_1 \sin x - A_2 \cos x + A_3 e^x + 2A_4$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} \quad -A_1 \sin x - A_2 \cos x + A_3 e^x + 2A_4 + A_1 \cos x -$$

$$A_2 \sin x + A_3 e^x + 2A_4 x + A_5 = 2\sin x + e^x + x - 1$$

$$\sin x(-A_1 - A_2) + \cos x(-A_2 + A_1) + 2A_3 e^x + 2A_4 x + A_5 + 2A_4 = 2\sin x + e^x + x - 1$$

$$\begin{cases} -A_1 - A_2 = 2 \\ -A_2 + A_1 = 0 \quad \to \quad A_1 = A_2 = -1 \\ 2A_3 = 1 \quad \to \quad A_3 = \dfrac{1}{2} \\ 2A_4 = 1 \quad \to \quad A_4 = \dfrac{1}{2} \\ A_5 + 2A_4 = -1 \quad \to \quad A_5 = -2 \end{cases}$$

$$y_p = -\sin x - \cos x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x \quad \to \quad y = y_g + y_p$$

۳-۶-۲-۱- تمرین : فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید. (محاسبه ضرایب الزامی نیست).

1) $y''' + 2y'' + 2y' = xe^{-x}\cos x + \sin x + e^{-x} + x - 2 + \sinh x$

2) $(D^2 + 4)(D-1)^2 D^3 y = x\sin^2 x + \sinh x + x\cosh x + x^2$

3) $y'' - 3y' + 2y = x^2 \sinh x + x^3 \cos^2 4x + e^x + \sin 4x - 1$

۳-۶-۳- روش تغییر پارامتر (روش لاگرانژ) :

این روش از روش ضرایب نامعین قوی تر است. محدودیت های روش ضرایب نامعین را ندارد. ضرایب معادله ممکن است ثابت نباشند، $R(x)$ در این روش هر تابع دلخواه می تواند باشد. فقط منوط بر این که جواب عمومی معادله همگن نظیر را باید داشته باشیم.

برای حل معادله مرتبه دوم خطی غیر همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$ داریم: جواب $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ عمومی معادله همگن :

$$\begin{cases} V_1' y_1 + V_2' y_2 = 0 \\ V_1' y_1' + V_2' y_2' = R(x) \end{cases}$$

$$V_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad \rightarrow \quad V_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$V_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad \rightarrow \quad V_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$ رونسکین

در اینصورت $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$

۳-۶-۳-۱-حل معادلات مرتبه n ام خطی غیر همگن :

در این صورت جواب عمومی معادله همگن نظیر $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ است.

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

در این صورت جواب خصوصی به صورت $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 + \cdots + V_n y_n$ که $V_1, V_2, \cdots, V_n$ توابع مجهولی اند که از حل دستگاه زیر حاصل می شوند.

$$\begin{cases} V_1' y_1 + V_2' y_2 + \cdots + V_n' y_n = 0 \\ V_1' y_1' + V_2' y_2' + \cdots + V_n' y_n' = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ V_1' y_1^{(n-1)} + V_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + V_n' y_n^{(n-1)} = R(x) \end{cases}$$

این دستگاه n معادله n مجهول را با روش کرامر حل می کنیم.

مثال (۳۰) معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'' - 2y' + y = e^x$

$y'' - 2y' + y = 0 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1$ ۲ بار تکرار

$$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = x e^x \end{cases}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}=e^{2x}+xe^{2x}-xe^{2x}=e^{2x}$$

$$V_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{-xe^xe^x}{e^{2x}}dx=\frac{-x^2}{2}$$

$$V_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{e^xe^x}{e^{2x}}dx=x$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2 \quad\rightarrow\quad y_p=\frac{-x^2}{2}e^x+x\left(xe^x\right)=\frac{1}{2}x^2e^x$$

$$y=y_p+y_g \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x^2e^x+c_1e^x+c_2xe^x$$

2) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sec 2x$

$$y''+2y'+5y=0 \quad\rightarrow\quad m^2+2m+5=0 \quad\rightarrow\quad m=-1\pm 2i$$

$$y_g=c_1e^{-x}\sin 2x+c_2e^{x}\cos 2x \quad\rightarrow\quad \begin{cases} y_1=e^{-x}\sin 2x \\ y_2=e^{-x}\cos 2x \end{cases}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-x}\sin 2x & e^{-x}\cos 2x \\ -e^{-x}\sin 2x+2e^{-x}\cos 2x & -e^{-x}\cos 2x-2e^{-x}\sin 2x \end{vmatrix}$$

$$W(y_1,y_2)=-e^{-2x}\sin 2x\cos 2x-2e^{-2x}\sin^2 2x+e^{-2x}\sin 2x\cos 2x-2e^{-2x}\cos^2 2x=-2e^{-2x}$$

$$V_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{-e^{-x}\cos 2x\, e^{-x}\sec 2x}{-2e^{-2x}}dx=\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x$$

$$V_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{e^{-x}\sin 2x\, e^{-x}\sec 2x}{-2e^{-2x}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2 \quad\rightarrow\quad y_p=\frac{1}{2}x\left(e^{-x}\sin 2x\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|e^{-x}\cos 2x$$

$$y=y_p+y_g$$

3) $x^2y''-2xy'+2y=5x^3\cos x$

معادله کوشی اویلر

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

$$x=e^z \quad\rightarrow\quad \frac{d^2y}{dz^2}-3\frac{dy}{dz}+2y=0$$

$$m^2-3m+2=0 \rightarrow \begin{cases} m_1=1 \\ m_2=2 \end{cases} \rightarrow y_g=c_1e^z+c_2e^{2z} \rightarrow y_g=c_1x+c_2x^2$$

حال جواب عمومی معادله همگن $x^2y''-2xy'+2y=0$ را داریم :

$$\div x^2 \rightarrow y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=5x\cos x$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2$$

$$V_1=\int\frac{-x^2 5x\cos x}{x^2}dx=-5\int x\cos x\,dx \xrightarrow{\text{جز به‌جز}}$$

$$V_1=-5(x\sin x+\cos x)$$

$$V_2=\int\frac{x5x\cos x}{x^2}dx=5\sin x$$

$$y=y_p+y_g=-5(x\sin x+\cos x)x+5\sin x\left(x^2\right)+c_1x+c_2x^2$$

$$y=-5x\cos x+c_1x+c_2x^2$$

---

4) $x^2y''-xy'+y=6x\ln x \qquad (x>0)$ معادله کوشی اویلر

$$\begin{cases} x=e^z \\ z=\ln x \end{cases} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{d^2y}{dz^2}-2\frac{dy}{dz}+y=6e^z z$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}-2\frac{dy}{dz}+y=0 \rightarrow m^2-2m+1=0 \rightarrow m=1$$ ریشه مضاعف

$$y_g=c_1e^z+c_2ze^z$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^z & ze^z \\ e^z & ze^z+e^z \end{vmatrix}=e^{2z}$$

$$V_1=\int\frac{-y_2R(z)}{W(y_1,y_2)}dz=\int\frac{-ze^z6e^zz}{e^{2z}}dz=-6\int z^2dz=-2z^3$$

$$V_2=\int\frac{y_1R(z)}{W(y_1,y_2)}dz=\int\frac{e^z\left(6e^zz\right)}{e^{2z}}dz=\int 6z\,dz=3z^2$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2=-2z^3\left(e^z\right)+3z^2\left(ze^z\right)=z^3e^z$$

$$y=y_p+y_g=c_1e^z+c_2e^zz+z^3e^z \xrightarrow{e^z=x\rightarrow z=\ln x} y=c_1x+c_2x\ln x+\left(\ln^3 x\right)x$$

---

5) $y''-y'=\dfrac{1}{e^x+1}$

$$y''-y'=0 \;\rightarrow\; m^2-m=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases} \;\rightarrow\; y_g=c_1e^{0x}+c_2e^x=c_1+c_2e^x$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}=e^x$$

$$V_1=\int \frac{-e^x\dfrac{1}{e^x+1}}{e^x}dx=-\int \frac{dx}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\int\frac{-e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=\ln\left|1+e^{-x}\right|$$

$$V_2=\int \frac{1\dfrac{1}{e^x+1}}{e^x}dx=\int\frac{dx}{e^x(e^x+1)}\overset{*}{=}-x-e^{-x}+\ln(e^x+1)$$

$$*\quad e^x=u \;\rightarrow\; dx=\frac{du}{u} \;\rightarrow\; \int\frac{\frac{du}{u}}{u(1+u)}=\int\frac{du}{u^2(1+u)}=\int\left(\frac{-1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=-\ln u-\frac{1}{u}+\ln(u+1)=-x-e^{-x}+\ln(e^x+1)$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2=\ln(1+e^{-x})(1)+\left(-x-e^{-x}+\ln(e^x+1)\right)e^x$$

$$y=y_p+y_g$$

---

6) $(2x+3)^2y''+12(2x+3)y'+24y=\dfrac{\ln^2(2x+3)}{(2x+3)^5}$ معادله کوشی اویلر

$$\begin{cases} (2x+3)=e^z \\ z=\ln(2x+3) \end{cases} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{d^2y}{dz^2}+5\frac{dy}{dz}+6y=z^2e^{-5z}$$

(معادله جدید برحسب z)

$$\frac{d^2y}{dz^2}+5\frac{dy}{dz}+6y=0 \;\rightarrow\; m^2+5m+6=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} m_1=-2 \\ m_2=-3 \end{cases}$$

$$y_g=c_1e^{-2z}+c_2e^{-3z}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-2z} & e^{-3z} \\ -2e^{-2z} & -3e^{-3z} \end{vmatrix}=-e^{-5z}$$

$$V_1=\int\frac{-y_2R(z)}{W(y_1,y_2)}dz=\int\frac{-e^{-3z}z^2e^{-5z}}{-e^{-5z}}dz=\int z^2e^{-3z}dz\xrightarrow{\text{جز به جز}}=\left[-\frac{z^2}{3}-\frac{2z}{9}-\frac{2}{27}\right]e^{-3z}$$

$$V_2=\int \frac{y_1R(z)}{W(y_1,y_2)}dz=\int\frac{e^{-2z}z^2e^{-5z}}{-e^{-5z}}dz=-\int z^2e^{-2z}\,dz \xrightarrow{\text{جز به جز}} =\left[\frac{z^2}{2}+\frac{2z}{4}+\frac{2}{8}\right]e^{-2z}$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2=e^{-5z}\left[\frac{1}{6}z^2+\frac{5}{18}z+\frac{19}{108}\right]$$

$$y=y_p+y_g= \xrightarrow{e^z=x\to z=\ln x}$$

$$y=\left[\frac{1}{6}\left(\ln^2(2x+3)\right)+\frac{5}{18}\ln(2x+3)+\frac{19}{108}\right](2x+3)^{-5}+c_1(2x+3)^{-2}+c_2(2x+3)^{-3}$$

مثال (۳۱) معادله $x^4y''+2x^3y'-y=16e^{\frac{3}{x}}$ را در نظر بگیرید : الف) نشان دهید $y_1=e^{\frac{-1}{x}}$ یک جواب معادله همگن نظیر است. ب) جواب عمومی معادله همگن نظیر را بیابید. ج) جواب عمومی معادله غیر همگن را بیابید .

الف)

$$y_1=e^{\frac{-1}{x}} \quad\to\quad y_1'=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \quad\to\quad y_1''=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$$

جایگذاری در معادله همگن $\to\quad x^4y''+2x^3y'-y=0$

$$x^4\left[-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}\right]+2x^3\left[\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right]-e^{\frac{-1}{x}}=0$$

$$\to\quad -2xe^{\frac{-1}{x}}+e^{\frac{-1}{x}}+2xe^{\frac{-1}{x}}-e^{\frac{-1}{x}}=0 \qquad 0=0$$ پس جواب است.

ب)

$$x^4y''+2x^3y'-y=0 \xrightarrow{\div x^4} y''+\frac{2}{x}y'-\frac{1}{x^4}y=0$$

$$V(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=\int\frac{1}{e^{-\frac{2}{x}}}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx=\int e^{\frac{2}{x}}e^{-2\ln x}dx=\int\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx= \xrightarrow{\frac{2}{x}=u} -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}$$

$$y_2=V(x)y_1=-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}e^{-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-\frac{1}{x}}+c_2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} \quad\to\quad y_g=c_1e^{-\frac{1}{x}}+c_2e^{\frac{1}{x}} \quad\to\quad \begin{cases} y_1=e^{-\frac{1}{x}} \\ y_1=e^{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

چ)

$$y''+\frac{2}{x}y'-\frac{1}{x^4}y=\frac{16}{x^4}e^{\frac{3}{x}}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{x}} & e^{\frac{1}{x}} \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \end{vmatrix}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{2}{x^2}$$

$$V_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{-e^{\frac{1}{x}}\frac{16}{x^4}e^{\frac{3}{x}}}{-\frac{2}{x^2}}dx=8\int\frac{e^{\frac{4}{x}}}{x^2}dx \overset{\frac{4}{x}=u}{=} -2e^{\frac{4}{x}}$$

$$V_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}\frac{16}{x^4}e^{\frac{3}{x}}}{-\frac{2}{x^2}}dx=-8\int\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx \overset{\frac{2}{x}=u}{=} 4e^{\frac{2}{x}}$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2=-2e^{\frac{4}{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)+4e^{\frac{2}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=2e^{\frac{3}{x}}$$

$$y=y_p+y_g=2e^{\frac{3}{x}}+c_1e^{-\frac{1}{x}}+c_2e^{\frac{1}{x}}$$

مثال (۳۲) معادله زیر را حل کنید.

$$x^4y''+2x^3y'-4y=\frac{1}{x}e^{-\frac{2}{x}} \qquad \left(z=\frac{1}{x}\right)$$

ابتدا با $z=\frac{1}{x}$ معادله را تبدیل به معادله ای با ضرایب ثابت می کنیم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} x^4\left(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}\right)+2x^3\left(\frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)-4y=ze^{-\frac{2}{z}}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}-4y=ze^{-2z}$$ (معادله جدید برحسب z)

$$\frac{d^2y}{dz^2}-4y=0 \;\rightarrow\; m^2-4=0 \quad m=\pm 2 \;\rightarrow\; y_g=c_1e^{2z}+c_2e^{-2z}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{2z} & e^{-2z} \\ 2e^{2z} & -2e^{-2z} \end{vmatrix}=-4$$

$$V_1=\int \frac{-y_2R(z)}{W(y_1,y_2)}dz=\int\frac{-e^{-2z}ze^{-2z}}{-4}dz=\frac{1}{4}\int ze^{-4z}dz$$

$$V_1=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}ze^{-4z}-\frac{1}{16}e^{-4z}\right]$$

$$V_2=\int \frac{y_1R(z)}{W(y_1,y_2)}dz=\int\frac{e^{2z}ze^{-2z}}{-4}dz=-\frac{1}{4}\frac{z^2}{2}=-\frac{z^2}{8}$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2=\left[-\frac{1}{16}ze^{-4z}-\frac{1}{64}e^{-4z}\right]e^{2z}-\frac{z^2}{8}\left[e^{-2z}\right]$$

$$y_p=e^{-2z}\left[\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z-\frac{1}{64}\right]$$

$$y=y_p+y_g=e^{-2z}\left[\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z-\frac{1}{64}\right]+c_1e^{2z}+c_2e^{-2z} \xrightarrow{z=\frac{1}{x}}$$

$$y=e^{-\frac{2}{x}}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{64}\right]+c_1e^{\frac{2}{x}}+c_2e^{-\frac{2}{x}}$$

مثال (۳۳) معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\quad y'''+y'=\sec x \;\rightarrow\; y'''+y'=0 \;\rightarrow\; m^3+m=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} m=0 \\ m=\pm i\end{cases}$$

$$y_g=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x \;\rightarrow \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=\cos x \\ y_3=\sin x\end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1'\times 1+V_2'\cos x+V_3'\sin x=0 \\ V_1'\times 0-V_2'\sin x+V_3'\cos x=0 \\ V_1'\times 0-V_2'\cos x-V_3'\sin x=\sec x \end{cases}$$

با روش کرامر

$$V_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ \sec x & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}=\frac{\sec x}{1}\xrightarrow{\int dx} V_1=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$$

$$V_2'=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & \sin x\\ 0 & 0 & \cos x\\ 0 & \sec x & -\sin x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}=\frac{-1}{1}\xrightarrow{\int dx} V_2=-x$$

$$V_3'=\frac{\begin{vmatrix}1 & \cos x & 0\\ 0 & -\sin x & 0\\ 0 & -\cos x & \sec x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}=\frac{-\tan x}{1}\xrightarrow{\int dx} V_3=\ln\left|\cos x\right|$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2+V_3y_3=\ln\left|\sec x+\tan x\right|-x\cos x+\sin\left(\ln\left|\cos x\right|\right)$$

$$y=y_p+y_g$$

---

2) $y'''-3y''+2y'=\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

$$\rightarrow\ y'''-3y''+2y'=0\ \rightarrow\ m^3-3m^2+2m=0\ \rightarrow\ \begin{cases}m_1=0\\ m_2=1\\ m_3=2\end{cases}$$

$$y_g=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}$$

$$\begin{cases}V_1'\times 1+V_2'e^x+V_3'e^{2x}=0\\ V_1'\times 0+V_2'e^x+V_3'2e^{2x}=0\\ V_1'\times 0+V_2'e^x+4V_3'e^{2x}=\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\end{cases}$$

با روش کرامر

$$V_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^x & e^{2x}\\ 0 & e^x & 2e^{2x}\\ \frac{e^{2x}}{1+e^x} & e^x & 4e^{2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & e^x & e^{2x}\\ 0 & e^x & 2e^{2x}\\ 0 & e^x & 4e^{2x}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{e^{5x}}{1+e^x}}{e^{3x}}=\frac{e^{2x}}{1+e^x}\xrightarrow{\int dx} V_1=e^x-\ln\left|1+e^x\right|$$

$$V_2'=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & e^{2x}\\ 0 & 0 & 2e^{2x}\\ 0 & \frac{e^{2x}}{1+e^x} & 4e^{2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & e^x & e^{2x}\\ 0 & e^x & 2e^{2x}\\ 0 & e^x & 4e^{2x}\end{vmatrix}}=\frac{-\frac{2e^{4x}}{1+e^x}}{e^{3x}}=\frac{-2e^x}{1+e^x}\xrightarrow{\int dx} V_2=-2\ln\left|1+e^x\right|$$

$$V_3'=\frac{\begin{vmatrix}1 & e^x & 0\\ 0 & e^x & 0\\ 0 & e^x & \frac{e^{2x}}{1+e^x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & e^x & e^{2x}\\ 0 & e^x & 2e^{2x}\\ 0 & e^x & 4e^{2x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{1+e^x}\xrightarrow{\int dx} V_3=-\ln\left|1+e^{-x}\right|$$

$$y_p=V_1y_1+V_2y_2+V_3y_3=\left(e^x-\ln\left|1+e^x\right|\right)-2\ln\left|1+e^x\right|e^x+\left(-\ln\left|1+e^{-x}\right|\right)e^{2x}$$

$$y=y_p+y_g$$

۳-۶-۳-۱- تمرین :

(۱) معادلات زیر را حل کنید.

1) $y''+2y'+y=\frac{\ln x}{x^2e^x}$

2) $y''-2y'+y=e^x\ln x$

3) $y''+6y'+9y=\frac{e^{-3x}}{x^3}$

4) $y''+4y=\sin 2x$

5) $y''+2y'+2y=\frac{e^{-x}}{\sin x}$

6) $y'''+y'=\csc x$

7) $y'''+y'=\tan x$

8) $y'''-2y''+y'=e^x$

(۲) معادلات زیر را حل کنید.

1) $x^2y''+3xy'+y=\dfrac{1}{x\ln x}$

2) $x^2y''+xy'+4y=\tan(2\ln x)+\ln x$

3) $x^2y''+xy'+4y=\sin(\ln x)$

4) $(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=2\cos(\ln(1+x))$

5) $x^2y''+xy'+y=x^3$

6) $x^2y''-2xy'+2y=x\ln x+\dfrac{1}{x^2}$

7) $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2 x-\ln x^2$

8) $xy''-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{\ln x}{x}$

(۳) در معادلات ناهمگن زیر یک جواب معادله همگن نظیر داده شده است. جواب عمومی را بیابید.

1) $2xy''+(1-4x)y'+(2x-1)y=e^x \quad\rightarrow\quad y_1=e^x$

2) $y''-\dfrac{2}{x}y'+\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)y=xe^x \quad\rightarrow\quad y_1=x\cos x$

3) $x^4y''+2x^3y'+y=1 \quad\rightarrow\quad y_1=\sin\dfrac{1}{x}$

4) $y''-2y'\tan x+3y=\sec x \quad\rightarrow\quad y_1=\sin x$

(۴) ثابت کنید $y=\sin x^2$ جواب معادله زیر است.

$$xy''-y'+4x^3y=0$$

ب) سپس به کمک (الف) این جواب معادله زیر را بیابید.

$$xy''-y'+4x^3y=2x^3\sec x^2$$

(۵) معادلات زیر را حل کنید.

1) $x^2y''-3xy'+4y=\dfrac{1}{x^2}\cos(\ln x) \qquad (x>0)$

2) $x^2y''+6xy'+2y=\cos(\ln x)+\dfrac{\ln x}{x} \qquad (x>0)$

3) $x^2y''+xy'+y=\sec(\ln x)+(\ln x)^2 \qquad (x>0)$

۳-۷- معادله مرتبه n ام کوشی اویلر و ناهمگن :

$$(ax+b)^n y^{(n)}+p_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1(ax+b)y'+p_0y=R(x)$$

در این معادله کافیست $ax+b=e^z$ قرار دهیم و معادله را تبدیل به معادله ای با ضرایب ثابت کنیم.

مثال (۳۴) معادله زیر را حل کنید.

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$$

$$\begin{cases} x = e^z \\ z = \ln x \end{cases} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right)$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y''' = \frac{d}{dz}\frac{dz}{dx}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y''' = \frac{d^3z}{dz^3}\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} \frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} - 2\frac{dy}{dz} + 2y = e^{3z}z$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} - 2\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + 2y = e^{3z}z$$ (معادله برحسب z با ضرایب ثابت)

$$\frac{d^3y}{dz^3} - 2\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + 2y = 0 \quad \to \quad m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0$$

$$\to \quad m^2(m-2) - (m-2) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \quad \to \quad y_g = c_1e^{2z} + c_2e^z + c_3e^{-z}$$

حال برای یافتن y_p از هر دو روش می توان استفاده کرد. در اینجابا روش ضرایب نامعین حل می کنیم.

$$y_p = (Az+B)e^{3z}z^0 = (Az+B)e^{3z}$$

$$\frac{dy_p}{dz} = Ae^{3z} + 3(Az+B)e^{3z}$$

$$\frac{d^2y_p}{dz^2} = 6Ae^{3z} + 9(Az+B)e^{3z}$$

$$\frac{d^3y_p}{dz^3}=27Ae^{3z}+27(Az+B)e^{3z}$$

با جایگذاری در معادله جدید ناهمگن :

$$27Ae^{3z}+27(Az+B)e^{3z}-12Ae^{3z}-18(Az+B)e^{3z}-Ae^{3z}-3(Az+B)e^{3z}+2(Az+B)e^{3z}=ze^{3z}$$

$$\begin{cases}14A+8B=0\\8A=1\end{cases}\rightarrow\ A=\frac{1}{8}\quad B=-\frac{7}{32}\ \rightarrow\ y_p=\left(\frac{1}{8}z-\frac{7}{32}\right)e^{3z}$$

$$y=y_p+y_g=\left(\frac{1}{8}(\ln x)-\frac{7}{32}\right)x^3+c_1x^2+c_2x+c_3\frac{1}{x}$$

۳-۷-۱- تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=\frac{1}{x^2}$

2) $x^3y'''+2xy'-2y=2x^2+x$

۳-۸- حل معادلات کامل ناهمگن :

مانند معادله مرتبه دوم کامل همگن حل می شوند.

$$f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=R(x)$$

اگر در معادله بالا $f_1''-f_2'+f_3=0$ باشد معادله کامل است. در این صورت می توان به جای معادله بالا از فرمول $\frac{d}{dx}[f_1y'+(f_2-f_1')y]=R(x)$ استفاده کرد.

مثال (۳۵) معادلات زیر را حل کنید.

1) $(x^2-2x)y''+4(x-1)y'+2y=e^{2x}$

$f_1''-f_2'+f_3=2-4+2=0$ معادله کامل است چون :

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2-2x)y'+2(x-1)y\right]=e^{2x}\ \xrightarrow{\int dx}$$

$(x^2-2x)y'+2(x-1)y=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1$ معادله خطی مرتبه اول

$$\xrightarrow{\div(x^2-2x)}\ y'+\frac{2x-2}{x^2-2x}y=\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{x^2-2x}+\frac{c_1}{x^2-2x}$$

$$y=e^{-\int\frac{2x-2}{x^2-2x}dx}\left(\int\left(\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{x^2-2x}-\frac{c_1}{x^2-2x}\right)e^{\int\frac{2x-2}{x^2-2x}dx}dx+c_2\right)$$

$$y=\frac{1}{x^2-2x}\left(\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}-c_1\right)dx+c_2\right)$$

نکته : $$e^{\int\frac{2x-2}{x^2-2x}dx}=e^{\ln|x^2-2x|}=x^2-2x$$

$$y=\frac{1}{x^2-2x}\left(\frac{1}{4}e^{2x}-c_1x+c_2\right)$$

---

2) $x\,y''-\cos x\,y'+\sin x\,y=2$

معادله کامل است چون : $f_1''-f_2'+f_3=0-\sin x+\sin x=0$

$$\frac{d}{dx}\left[x\,y'+[-\cos x-1]y\right]=2\xrightarrow{\int dx}$$

معادله خطی مرتبه اول $x\,y'-(\cos x+1)y=2x+c_1$

$$y'-\left(\frac{\cos x+1}{x}\right)y=\frac{2x+c_1}{x}\rightarrow y=e^{\int\frac{\cos x+1}{x}dx}\left(\int\frac{2x+c_1}{x}e^{-\int\frac{\cos x+1}{x}dx}dx+c_2\right)$$

انتگرال ها قابل حل نیستند.

۳-۸-۱ - تمرین : معادلات زیر را حل کنید.

1) $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=3$

2) $y''+x\,y'+y=x^2$

3) $(1+x^3)y''+6x^2y'+6xy=6x$

4) $(\tan x)y''+2\sec^2 x\,y'+(2\tan x\sec x)y=e^x$

5) $(\ln x)y''+\frac{2}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=6$

فصل چهارم : حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها

۴-۱- نقطه عادی (معمولی یا نامنفرد)، نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) :

تعریف : در معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=R(x)$ ، نقطه a را نقطه عادی معادله گوییم اگر توابع $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ در نقطه a تحلیلی باشند در غیر این صورت a را نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل می نامیم.

مثال (۱) در معادله $xy''+2y'-3x^3y=0$ نقطه $x=0$ نقطه غیر عادی معادله است، زیر تابع $p(x)=\frac{2}{x}$ در $x=0$ تحلیلی نیست, ولی نقاط دیگر, را نقطه عادی معادله می نامیم.

مثال (۲) برای معادله $(x+1)y''+3xy'-6y=0$ نقطه $x=-1$ یک نقطه غیر عادی برای معادله است, زیرا با نوشتن $y''+\frac{3x}{x+1}y'-\frac{6}{x+1}y=0$ ، توابع $p(x)=\frac{3x}{x+1}$ ، $q(x)=\frac{-6}{x+1}$ در $x=-1$ تحلیلی نیستند ولی نقاط دیگر را نقطه عادی می نامیم.

مثال (۳) معادله دیفرانسیل $(\sin x)y''+(x-1)y'+\cos x\, y=0$ دارای بی نهایت نقطه غیر عادی است چون $p(x)=\frac{x-1}{\sin x}$ و $q(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ در $x=k\pi$ $(k\in z)$ تحلیلی نیست.

۴-۱-۲- نقطه غیر عادی منظم

تعریف : نقطه x_0 را نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ نامیم, هرگاه نقطه x_0 یک نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل باشد و توابع $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند در غیر این صورت نقطه x_0 نقطه غیر عادی نامنظم معادله می باشد (یا به عبارتی حدهای زیر هر دو موجود باشند).

$$p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$$

$$q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$$

نکته : حتی اگر یکی از حدهای فوق موجود نباشند (بی نهایت شوند) نقطه X_0 را غیر عادی نامنظم می نامیم.

مثال (۴) در معادله $2xy''-y'+3x^2y=0$ ، نقطه x_0 نقطه غیرعادی منظم معادله است زیرا اولاً توابع $p(x)=\frac{-1}{2x}$ در $x=0$ غیر تحلیلی است و از طرفی $p_0=\lim_{x\to0}(x-0)\left(\frac{-1}{2x}\right)=-\frac{1}{2}$ و $q_0=\lim_{x\to0}(x-0)\frac{3x^2}{2x}=0$ موجودند.

مثال (۵) نقاط غیر عادی معادله زیر را بیابید و نوع آنها را تعیین کنید.

$$x^3(2x-1)y''+3xy'-(x-1)y=0 \quad\rightarrow\quad y''+\frac{3}{x^2(2x-1)}y'-\frac{(x-1)}{x^3(2x-1)}y=0$$

$p(x)$ و $q(x)$ در $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ غیر تحلیلی اند پس این نقاط، غیر عادی اند. از طرفی:

$$x=0 \text{ در } \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{3}{x^2(2x-1)}=\infty \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0} x^2\dfrac{-(x-1)}{x^3(2x-1)}=\infty \end{cases}$$

$x=0$ غیر عادی نامنظم است.

$$x=\frac{1}{2} \text{ در } \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{3}{x^2(2x-1)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{3}{2x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=6 \\ q_0=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{-(x-1)}{x^3(2x-1)}=0 \end{cases}$$

$x=\frac{1}{2}$ غیر عادی منظم است.

مثال (۶) نقاط غیر عادی معادله زیر را بیابید و نوع آنها را مشخص کنید.

$$x^3(2x-1)y''+4xy'-(x+2)y=0$$

$$\div x^3(2x-1) \quad\to\quad y''+\frac{4}{x^2(2x-1)}y'-\frac{(x+2)}{x^3(2x-1)}y=0$$

$p(x)=\dfrac{4}{x^2(2x-1)}$ و $q(x)=-\dfrac{x+2}{x^3(2x-1)}$ در نقاط $x=0$ و $x=\dfrac{1}{2}$ غیر تحلیلی اند پس غیر عادی اند.

$$\text{در } x=0 \quad\to\quad p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{4}{x^2(2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x(2x-1)}=\infty$$

نیازی به محاسبه q_0 نیست.

$$x=\frac{1}{2}\to \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{4}{x^2(2x-1)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{4}{2x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=8 \\ q_0=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{-(x+2)}{x^3(2x-1)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{-(x+2)}{2x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)}=0 \end{cases}$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی نامنظم و $x=\dfrac{1}{2}$ نقطه غیر عادی منظم است.

مثال (۷) نشان دهید $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله $2x^2y''+3xy'-(1+x)y=0$ است.

$$\div 2x^2 \quad \to \quad y''+\frac{3}{2x}y'-\frac{(1+x)}{2x^2}y=0$$

چون $p(x)=\frac{3}{2x}$ و $q(x)=-\frac{1+x}{2x^2}$ در $x=0$ غیر تحلیلی اند پس $x=0$ غیر عادی است.

$$x=0\to \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)\frac{3}{2x}=\frac{3}{2} \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2\frac{2[-(1+x)]}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1+x}{2}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

مثال (۸) نوع نقطه $x=0$ را در معادلات زیر تعیین کنید ؟

$$1)\ xy''+(\sin x)y=0 \xrightarrow{\div x} y''+\frac{\sin x}{x}y=0$$

$$p(x)=0 \text{ و } q(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

پس هم $p(x)$ و $q(x)$ در $x=0$ تحلیلی اند. پس $x=0$ یک نقطه عادی معادله است.

روش دیگر :

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right]=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}$$

$x=0$ به دلیل این که از مخرج حذف شد برای تابع $\frac{\sin x}{x}$ نقطه عادی محسوب می شود.

$$2)\ x^2y''+(\sin x)y=0 \xrightarrow{\div x^2} y''+\frac{\sin x}{x^2}y=0$$

$$p(x)=0 \text{ و } q(x)=\frac{\sin x}{x^2}$$

روش اول : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\infty\times 1=\infty$ غیر عادی $x=0$

روش دوم : $$\frac{\sin x}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right]=\frac{1}{x}-\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}+\cdots$$

$x=0$ به دلیل این که از مخرج حذف نشد پس برای تابع $\frac{\sin x}{x^2}$ نقطه غیر عادی محسوب می شود.

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)p(x)\overset{p(x)=0}{=}0 \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\frac{\sin x}{x^2}=0 \end{cases}$$

پس $x=0$ غیر عادی منظم است.

$$3)\ x^3y''+(\sin x)y=0 \xrightarrow{\div x^3} y''+\left(\frac{\sin x}{x^3}\right)y=0$$

$q(x)=\frac{\sin x}{x^3}$ و $p(x)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\infty\times 1=\infty$$

$x=0$ غیر عادی است.

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)p(x)\overset{p(x)=0}{=}0 \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\frac{\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \end{cases}$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی و منظم معادله است.

$$4)\ x^4y''+(\sin x)y=0 \xrightarrow{\div x^4} y''+\left(\frac{\sin x}{x^4}\right)y=0$$

$q(x)=\frac{\sin x}{x^4}$ و $p(x)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\infty\times 1=\infty$$

$x=0$ غیر عادی است.

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 0}(x-0)p(x) \overset{p(x)=0}{=} 0 \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2 q(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \dfrac{\sin x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2} = \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \infty \times 1 = \infty \end{cases}$$

پس $x = 0$ نقطه غیر عادی و نامنظم معادله است.

۴-۲- حل معادلات دیفرانسیل حول نقاط عادی :

قضیه : اگر x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$ باشد، در این صورت این معادله دیفرانسیل دارای جوابی به فرم $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ حول نقطه x_0 می باشد.

طریقه حل : پس از معین کردن شکل کلی جواب معادله از قضیه بالا، از آن مشتق گرفته و در معادله جایگذاری می کنیم پس از هم توان کردن و هم شروع کردن جملات، فاکتورگیری کرده و ضرایب نظیر به نظیر در طرف معادله را برابر قرار می دهیم، تا ضرایب مجهول a_n بدست آیند.

مثال (۹) جواب عمومی معادله $y'' - xy = 0$ را در مجاورت $x = 0$ بیابید (این معادله، معادله آیری است).

توابع $p(x) = 0$ و $q(x) = -x$ در صفر تحلیلی اند پس $x = 0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\rightarrow\; y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \;\rightarrow\; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$y'' - xy = 0 \;\rightarrow\; \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

با تغییر n به $n+3$ در سری اول توان ها یکی می شوند.

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

اندیس ها را یکی می کنیم

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \;\rightarrow\; 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n\right] x^{n+1} = 0$$

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = 0 \rightarrow a_{n+3} = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}a_n \end{cases}$$ رابطه بازگشتی $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$n=0 \rightarrow a_3 = \frac{1}{6}a_0$$

$$n=1 \rightarrow a_4 = \frac{1}{12}a_1$$

$$n=2 \rightarrow a_5 = \frac{1}{20}a_2 \xrightarrow{a_2=0} a_5 = 0$$

$$n=3 \rightarrow a_6 = \frac{1}{30}a_3 = \frac{1}{6\times 30}a_0$$

$$n=4 \rightarrow a_7 = \frac{1}{42}a_4 = \frac{1}{12\times 42}a_1$$

$$n=5 \rightarrow a_8 = 0$$

$$n=6 \rightarrow a_9 = \frac{1}{72}a_6 = \frac{1}{72\times 6\times 30}a_0$$

جواب عمومی $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{6}a_0 x^3 + \frac{1}{12}a_1 x^4 + \frac{1}{180}a_0 x^6 + \frac{1}{12\times 42}a_1 x^7 + \frac{1}{72\times 180}a_0 x^9 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{72\times 180}x^9 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12\times 42}x^7 + \cdots\right)$$

مثال (۱۰) جواب عمومی معادله $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ را حول نقطه $x = 0$ بیابید.

چون توابع $p(x) = \dfrac{-x}{x-1}$ و $q(x) = \dfrac{1}{x-1}$ در $x=0$ تحلیلی اند لذا نقطه $x = 0$ یک نقطه عادی است پس جوابی به فرم $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارد.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

توان ها را یکی می کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

اندیس ها را یکی می کنیم (از سری دوم و چهارم جمله $n = 0$ را می نویسیم).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n)a_{n+1} x^n - 2a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$-2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n)\, a_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n + a_n\right]x^n = 0$$

$$\begin{cases} -2a_2 + a_0 = 0 \;\rightarrow\; a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\[2ex] n(n+1)\, a_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n + a_n = 0 \;\rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow\; a_{n+2} = \frac{n(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$n=1 \;\rightarrow\; a_3 = \frac{2a_2 - 0}{3\times 2} = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3\times 2} = \frac{a_0}{3!}$$

$$n=2 \;\rightarrow\; a_4 = \frac{6a_3 - a_2}{12} = \frac{a_0 - \frac{a_0}{2}}{12} = \frac{a_0}{4\times 3\times 2} = \frac{a_0}{4!}$$

$$n=3 \;\rightarrow\; a_5 = \frac{12a_4 - 2a_3}{5\times 4} = \frac{\frac{a_0}{2} - 2\frac{a_0}{6}}{5\times 4} = \frac{a_0}{5!}$$

پس حالت کلی داریم $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ و جواب عمومی به فرم زیر است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_0}{5!}x^5 + \cdots$$

$$y = a_1 x + a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \;\rightarrow\; y = a_0 e^x + (a_1 - a_0)x$$

نکته : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

مثال (۱۱) جواب عمومی معادله $y''-xy'-y=0$ را حول نقطه $x=0$ بیابید.

$x=0$ نقطه عادی معادله فوق است

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

توان ها را یکی می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار جمله اول سری اول و سری سوم را خارج می کنیم.

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-a_0-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$2a_2-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n-a_n\right]x^n=0$$

$$\begin{cases}2a_2-a_0=0 \rightarrow a_2=\dfrac{a_0}{2}\\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n-a_n=0 \rightarrow a_{n+2}=\dfrac{a_n}{n+2} \quad n\geq 1\end{cases}$$

$$n=1 \rightarrow a_3=\frac{a_1}{3}$$

$$n=2 \rightarrow a_4=\frac{a_2}{4}= \rightarrow a_4=\frac{a_0}{2\times 4}$$

$$n=3 \rightarrow a_5=\frac{a_3}{5}= \rightarrow a_5=\frac{a_1}{3\times 5}$$

$$n=4 \rightarrow a_6=\frac{a_4}{6}= \rightarrow a_6=\frac{a_0}{2\times 4\times 6}$$

$$n=5 \rightarrow a_7=\frac{a_5}{7} \rightarrow a_7=\frac{a_1}{3\times 5\times 7}$$

پس $\quad a_{2n}=\dfrac{a_0}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$

$$a_{2n+1}=\frac{a_1}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad\rightarrow\quad y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$$

$$y=a_0+a_1x+\frac{a_0}{2}x^2+\frac{a_1}{3}x^3+\frac{a_0}{2\times4}x^4+\frac{a_1}{3\times5}x^5+\frac{a_0}{2\times4\times6}x^6+\frac{a_1}{3\times5\times7}x^7\cdots$$

$$y=a_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\times4}+\frac{x^6}{2\times4\times6}+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\times5}+\frac{x^7}{3\times5\times7}+\cdots\right).$$

مثال (۱۲) جواب عمومی معادله $y''+4y=0$ را حول $x=0$ حل کنید.

این معادله در $x=0$ نقطه عادی است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad\rightarrow\quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad\rightarrow\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n=0$$

$$\rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+4a_n\right]x^n=0$$

$$\rightarrow \quad (n+2)(n+1)a_{n+2}+4a_n=0 \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$a_{n+2}=\frac{-4}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$n=0 \quad\rightarrow\quad a_2=\frac{-4}{2\times1}a_0$$

$$n=1 \quad\rightarrow\quad a_3=\frac{-4}{3\times2}a_1$$

$$n=2 \quad\rightarrow\quad a_4=\frac{-4}{4\times3}a_2 \quad\rightarrow\quad a_4=\frac{16}{4\times3\times2\times1}a_0$$

$$n=3 \quad\rightarrow\quad a_5=\frac{-4}{5\times4}a_3 \quad\rightarrow\quad a_5=\frac{16}{5\times4\times3\times2}a_1$$

$$n=4 \quad\rightarrow\quad a_6=\frac{-4}{6\times5}a_4 \quad\rightarrow\quad a_6=\frac{-16\times4}{6\times5\times4\times3\times2\times1}a_0$$

$$n=5 \quad\rightarrow\quad a_7=\frac{-4}{7\times6}a_5 \quad\rightarrow\quad a_7=\frac{-4\times16}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}a_1$$

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}a_0 \quad n\geq 1$$

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!}a_1 \quad n\geq 1$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \to \quad y=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$y=a_0\cos 2x+a_1\sin 2x$$

توجه کنید اگر معادله فوق را با روش معادله مشخصه هم حل می کردیم همین نتیجه حاصل می شد.

مثال (۱۳) جواب عمومی معادله $y''-x^2y'-y=0$ را حول $x=0$ حل کنید.

بدیهی است که $x=0$ برای این معادله نقطه عادی است

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \to \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad \to \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

توان ها را یکی می کنیم.

$$\to \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

از سری اول و سوم، دو جمله اول را می نویسیم.

$$\to \quad 2a_2-a_0+(6a_3-a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_{n-1}-a_n\right]x^n=0$$

$$2a_2-a_0=0 \quad \to \quad a_2=\frac{a_0}{2}$$

$$6a_3-a_1=0 \quad \to \quad a_3=\frac{a_1}{6}$$

$$\to \quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_{n-1}-a_n=0 \quad \to$$

$$a_{n+2}=\frac{(n-1)a_{n-1}+a_n}{(n+2)(n+1)} \quad n\geq 2$$

$$n=2 \quad \to \quad a_4=\frac{a_1+a_2}{12} \quad \to \quad a_4=\frac{a_1+\frac{a_0}{2}}{12}=\frac{2a_1+a_0}{24}$$

$$n=3 \rightarrow a_5=\frac{2a_2+a_3}{20} \rightarrow a_5=\frac{2\left(\frac{a_0}{2}\right)+\frac{a_1}{6}}{20}=\frac{6a_0+a_0}{720}$$

$$n=4 \rightarrow a_6=\frac{3a_3+a_4}{30} \rightarrow a_6=\frac{3\left(\frac{a_1}{6}\right)+\frac{2a_1+a_0}{24}}{30}=\frac{14a_1+a_0}{720}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \rightarrow y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

$$y=a_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{20}+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{120}+\cdots\right)$$

۴-۳- سری فروبینوس :

تعریف : هر سری بصورت $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ یا $y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ را یک سری فروبینوس می نامیم.

قضیه : اگر x_0 یک نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد، معادله دیفرانسیل دارای یک جواب (خصوصی) بصورت سری فروبنیوس می باشد.

$$y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

اگر $p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$ و $q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$ باشند معادله $r(r-1)+p_0r+q_0=0$ را معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ می نامیم. اگر r_1 و r_2 ریشه های معادله مشخصه سری فروبنیوس باشند به طوری $r_1>r_2$ باشد در این صورت معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 می باشد.

نکته : در اغلب مثال ها $x_0=0$ است یا این که می توان با تغییر متغیر $t=x-x_0$ نقطه را تبدیل به $t=0$ کرد پس بعد از این $x_0=0$ قرار داده می شود.

قضیه : $(r_1>r_2)$ اگر نقطه $x=0$ نقطه غیر عادی منظم معادله باشد و r_1 و r_2 ریشه های معادله مشخصه نظیر باشند:

حالت اول : معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز است $(r_1\neq r_2)$ که تفاضل آنها عدد صحیح نیست $(r_1-r_2\notin Z)$ در این حالت می توان نشان داد معادله دارای ۲ جواب سری مستقل خطی بصورت سری فروبنیوس است :

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1} \quad , \quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_2}$$

یعنی سری را یکبار به ازای r_1 و یکبار هم به ازای r_2 حل می کنیم.

حالت دوم : اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز باشد ولی تفاضل آنها عدد صحیح باشد $(r_1-r_2\in z)$ در این حالت جواب اول را متناظر با ریشه بزرگتر محاسبه می کنیم.

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}\qquad a_0\neq 0$$

و برای تعیین جواب دوم از روش تغییر پارامترها استفاده می کنیم و فرم جواب دوم بصورت زیر است :

$$y_2=c\,y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r_2}$$

حالت سوم : اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف باشد $(r_1=r_2=r)$ در این حالت جواب اول به ازای r محاسبه می شود :

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

و برای جواب دوم بصورت زیر است :

$$y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r}$$

نکته : در حالت های دوم و سوم فقط y_1 را محاسبه می کنیم و محاسبه y_2 مورد بحث ما نیست.

نکته : در هر سه حالت فوق $y_g=c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل می باشد.

مثال (۱۴) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $4xy''+3y'-3y=0$ را حول $x=0$ بیابید.

$$\xrightarrow{\div 4x}\quad y''+\frac{3}{4x}y'-\frac{3}{4x}y=0$$

$x=0$ نقطه غیر عادی است چون $p(x)=\frac{3}{4x}$ و $q(x)=\frac{-3}{4x}$ در $x=0$ غیر تحلیلی اند.

$$p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{3}{4x}=\frac{3}{4}$$

$$q_0=\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{-3}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{4}=0$$

پس $x=0$ منظم است.

معادله مشخصه

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0\ \rightarrow\ r(r-1)+\frac{3}{4}r-0=0\ \rightarrow$$

$$r^2-\frac{1}{4}r=0\quad\begin{cases}r_1=\dfrac{1}{4}\\ r_2=0\end{cases}$$

چون $\frac{1}{4} = r_1 - r_2$ عدد صحیح نیست پس به ازای هر دو ریشه جواب را می یابیم.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \to y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \to y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\to\ 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم به جای n ، قرار می دهیم $(n-1)$

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-3\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری اول و دوم جمله اول را بنویسیم.

$$4r(r-1)a_0x^{r-1}+4\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+3ra_0x^{r-1}+3\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-3\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

$$ra_0(4r-1)x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[4(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-3a_{n-1}\right]x^{n+r-1}=0$$

از مساوی صفر قرار دادن بیرون سری داریم (همیشه معادله مشخصه حاصل می شود)

$$a_0r(4r-1)x^{r-1}=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} \begin{cases} r=0 \\ r=\frac{1}{4}\end{cases}$$

(همیشه) همان ریشه های معادله مشخصه اند.

و از مساوی صفر قرار دادن داخل سری رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$4(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-3a_{n-1}=0 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$a_n=\frac{3}{(n+r)[4n+4r-1]}a_{n-1} \qquad n\geq 1$$ رابطه بازگشتی

حال ریشه های معادله مشخصه را قرار می دهیم.

$$r_1=0 \ \to\ a_n=\frac{3}{n[4n-1]}a_{n-1} \qquad n\geq 1$$

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1=\frac{3}{3}a_0=a_0 \\ n=2 \rightarrow a_2=\frac{3}{14}a_1=\frac{3}{14}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=\frac{3}{33}a_2=\frac{3}{11\times 14}a_0 \end{cases}$$

پس
$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_1} \rightarrow y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$y_1=a_0+a_0x+\frac{3}{14}a_0x^2+\frac{3}{11\times 14}a_0x^3+\cdots$$

$$r_2=\frac{1}{4} \rightarrow a_n=\frac{3}{\left(n+\frac{1}{4}\right)(4n)}a_{n-1} \qquad n\geq 1$$

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1=\frac{3}{5}a_0 \\ n=2 \rightarrow a_2=\frac{3}{18}a_1 \rightarrow a_2=\frac{1}{6}a_1=\frac{1}{10}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=\frac{3}{3\times 13}a_2 \rightarrow a_3=\frac{1}{130}a_0 \end{cases}$$

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_2} \rightarrow y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}\left[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right]$$

$$y_2=x^{\frac{1}{4}}\left[a_0+\frac{3}{5}a_0x+\frac{1}{10}a_0x^2+\frac{1}{130}a_0x^3+\cdots\right] \rightarrow y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

مثال (۱۵) معادله $2xy''+\left(1-2x^2\right)y'-4xy=0$ را حول نقطه $x=0$ را به کمک سری فروبنیوس حل کنید.

$$\xrightarrow{\div 2x} y''+\frac{1-2x^2}{2x}y'-2y=0$$

$p(x)=\frac{1-2x^2}{2x}$ و $q(x)=-2$ که $p(x)$ در $x=0$ غیر تحلیلی است پس $x=0$ نقطه غیر عادی است.

$$p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{1-2x^2}{2x}=\frac{1}{2}$$

$q_0=\lim_{x\to 0}x^2(-2)=0$ پس $x=0$ نقطه منظم است.

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0 \rightarrow r(r-1)+\frac{1}{2}r=0 \rightarrow \begin{cases} r_1=\frac{1}{2} \\ r_2=0 \end{cases}$$

چون $r_1 - r_2 \notin Z$ پس به ازای هر دو ریشه جواب را می یابیم.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$2xy''+y'-2x^2y'-4xy=0$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم و چهارم به جای n ، قرار می دهیم $(n-2)$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-2\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)a_{n-2} x^{n+r-1}-4\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2} x^{n+r-1}=0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از جمله های اول و دوم سری اول و دوم را بنویسیم.

$$2r(r-1)a_0x^{r-1}+2(r+1)(r)a_1x^r+ra_0x^{r-1}+(1+r)a_1x^r+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n-2(n+r-2)a_{n-2}-4a_{n-2}\right]x^{n+r-1}=0$$

ابتدا در بیرون سری ضریب x^r و x^{r-1} را برابر صفر قرار می دهیم.

$$ra_0x^{r-1}(2r-2+1)=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} \begin{cases} r_1=\dfrac{1}{2} \\ r=0 \end{cases}$$ ریشه های معادله مشخصه

$$a_1x^r(1+r)(2r+1)=0 \rightarrow a_1=0$$

حال داخل سیگما را برابر صفر قرار می دهیم تا رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$a_n(n+r)[2(n+r-1)+1]-2a_{n-2}[(n+r-2+2)]=0$$

$$a_n=\frac{2}{2n+2r-1}a_{n-2} \qquad n\geq 2$$

حال ریشه های معادله مشخصه را قرار می دهیم.

$$r_1=\frac{1}{2} \rightarrow a_n=\frac{1}{n}a_{n-2} \qquad n\geq 2$$

$$\begin{cases} n=2 \rightarrow a_2=\frac{1}{2}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=\frac{1}{3}a_1 \xrightarrow{a_1=0} a_3=0 \\ n=4 \rightarrow a_4=\frac{1}{4}a_2=\frac{1}{8}a_0 \\ n=5 \rightarrow a_5=\frac{1}{5}a_3=0 \end{cases}$$

$$a_{2n}=\frac{a_{2n-2}}{2n}=\frac{a_0}{2^n n!}$$

$$a_{2n-1}=0$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sqrt{x}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right)$$

$$y_1=\sqrt{x}\left[a_0+\frac{1}{2}a_0x^2+\frac{1}{8}a_0x^4+\cdots\right] \xrightarrow{a_0=1}$$

$$y_1=\sqrt{x}\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\cdots\right] y_1=\sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{2n}=\sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}=\sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$r_2=0 \rightarrow a_n=\frac{2}{2n-1}a_{n-2} \qquad n\geq 2$$

$$\begin{cases} n=2 \rightarrow a_2=\frac{2}{3}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=\frac{2}{5}a_1 \xrightarrow{a_1=0} a_3=0 \\ n=4 \rightarrow a_4=\frac{2}{7}a_0=\frac{4}{21}a_0 \\ n=5 \rightarrow a_5=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y_2=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

$$\rightarrow y_2=a_0+\frac{2}{3}a_0x^2+\frac{4}{21}a_0x^4+\cdots \xrightarrow{a_0=1}$$

$$y_2=1+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{21}x^4+\cdots \quad \rightarrow y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

مثال (۱۶) جواب از نوع سری فربنیوس $x^2y''+3xy'-(2x-1)y=0$ را حول نقطه $x=0$ بیابید.

$$\xrightarrow{\div x^2}\quad y''+\frac{3}{x}y'-\frac{(2x-1)}{x^2}y=0$$

$p(x)=\frac{3}{x}$ و $q(x)=-\frac{2x-1}{x^2}$ در $x=0$ غیر تحلیلی اند پس $x=0$ نقطه غیر عادی است.

$$p_0=\lim_{x\to0}x\frac{3}{x}=3$$

$$q_0=\lim_{x\to0}x^2\left(-\frac{2x-1}{x^2}\right)=1$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0\quad\to\quad r(r-1)+3r+1=0\quad\to\quad r^2+2r+1=0$$

$r=r_1=r_2=-1$ ریشه مضاعف

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}\quad\to\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}\quad\to\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$x^2y''+3xy'-2xy+y=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم به جای n ، $(n-1)$ قرار می دهیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری های اول و دوم و چهارم جمله $n=0$ را بنویسیم.

$$r(r-1)a_0x^r+3ra_0x^r+a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-2a_{n-1}+a_n\right]x^{n+r}=0$$

از مساوی صفر قرار دادن بیرون سیگما داریم :

$$a_0x^r\left(r^2+2r+1\right)=0\ \xrightarrow{a_0\neq0}\ r^2+2r+1=0\ \to$$

$r=-1$ همان ریشه های معادله مشخصه است

حال داخل سیگما را برابر صفر قرار می دهیم تا رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-2a_{n-1}+a_n=0$$

$$\rightarrow\ a_n=\frac{2}{(n+r)(n+r-1)+3(n+r)+1}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

حال برای یافتن y_1 کافیست $r=-1$ قرار می دهیم.

$$a_n=\frac{2}{(n-1)(n-2)+3n-2}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

$$a_n=\frac{2}{n^2-3n+2+3n-2}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

$$a_n=\frac{2}{n^2}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

$$\begin{cases} n=1 \ \rightarrow\ a_1=2a_0 \\ n=2 \ \rightarrow\ a_2=\frac{1}{2}a_1=a_0 \\ n=3 \ \rightarrow\ a_3=\frac{2}{3^2}a_2=\frac{2}{3^2}a_0 \\ n=4 \ \rightarrow\ a_4=\frac{2}{4^2}a_3=\frac{2^2}{4^2\times 3^2}a_0=\frac{2^4}{(4!)^2}a_0 \\ n=5 \ \rightarrow\ a_5=\frac{2}{5^2}a_4=\frac{2^3}{4^2\times 3^2\times 5^2}a_0=\frac{2^5}{(5!)^2}a_0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{2^n a_0}{(n!)^2}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\frac{1}{x}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)\ \rightarrow\ y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)}x^n$$

مثال (۱۷) ابتدا نشان دهید $x=0$ یک نقطه غیر عادی و منظم معادله دیفرانسیل $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$ است پس یک جواب بصورت سری فروبنیوس برای آن بیابید.

$$\xrightarrow{\div x(x-1)}\ y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$$

$p(x)=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ و $q(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ در $x=0$ غیر تحلیلی اند پس $x=0$ نقطه غیر عادی معادله است.

$$p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{3x-1}{x(x-1)}=1$$

$$q_0=\lim_{x\to 0}x^2\frac{1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1}=0$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

$$r(r-1)+r=0 \rightarrow r^2=0 \rightarrow r=r_1=r_2=0$$ ریشه مضاعف

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$x^2 y''-x y''+3x y'-y'+y=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}-$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم و پنجم به جای n ، قرار می دهیم $(n-1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(n+r-2)a_{n-1}x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+$$

$$3\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری دوم و چهارم جمله $n=0$ را بنویسیم.

$$-r(r-1)a_0 x^{r-1}-r a_0 x^{r-1}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r-1)(n+r-2)a_{n-1}-(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r-1)a_{n-1}-(n+r)a_n+a_{n-1}\right]x^{n+r-1}=0$$

از مساوی صفر قرار دادن بیرون سیگما داریم :

$$-r^2a_0 x^{r-1}+r a_0 x^{r-1}-r a_0 x^{r-1}=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} r^2=0 \rightarrow$$

$r_1=r_2=r=0$ همان ریشه های معادله مشخصه است

حال داخل سیگما را برابر صفر قرار می دهیم تا رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$(n+r-1)(n+r-2)a_{n-1}-(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r-1)a_{n-1}-(n+r)a_n+a_{n-1}=0$$

$$\rightarrow a_n=\frac{-(n+r-1)(n+r-2)-3(n+r-1)-1}{-(n+r)(n+r-1)-(n+r)}a_{n-1} \qquad n\geq 1$$

با جایگذاری $r=0$ جواب حاصل می شود.

$$a_n=\frac{-(n-1)(n-2)-3(n-1)-1}{-n(n-1)-n}a_{n-1} \rightarrow a_n=\frac{-n^2+3n-2-3n+3-1}{-n^2+n-n}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{-n^2}{-n^2}a_{n-1} \rightarrow a_n=a_{n-1} \qquad n\ge 1$$

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1=a_0 \\ n=2 \rightarrow a_2=a_1=a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=a_2=a_0 \end{cases}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} \xrightarrow{r=0} y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$y=a_0+a_0x+a_0x^2+a_0x^3+\cdots \xrightarrow{a_0=1} 1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

مثال (۱۸) یک جواب بصورت سری فروبنیوس برای معادله زیر بیابید.

$$x^2y''+x(2x-1)y'+x(x-1)y=0 \xrightarrow{\div x^2} y''+\frac{2x-1}{x}y'+\frac{x-1}{x}y=0$$

$p(x)=\frac{2x-1}{x}$ و $q(x)=\frac{x-1}{x}$ در $x=0$ غیر تحلیلی است پس $x=0$ نقطه غیر عادی محسوب می شود.

$$p_0=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{2x-1}{x}\right)=-1$$

$$q_0=\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{x-1}{x}\right)=0$$

$$r(r-1)-r+0=0 \rightarrow r^2-2r=0 \rightarrow \begin{cases} r_1=2 \\ r_2=0 \end{cases}$$

چون $(r_1-r_2=2)$ تفاضل r_1 و r_2 عددی صحیح است پس مسئله را به ازای ریشه بزرگتر حل می کنیم :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$x^2y''+2x^2y'-xy'+x^2y-xy=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری دوم و آخر به جای n ، $(n-1)$ قرار می دهیم و در سری چهارم به جای n قرار می دهیم $(n-2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r} = 0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری اول و سوم جمله $n=0$ و $n=1$ و از سری دوم و آخر جمله $n=1$ را بنویسیم.

$$r(r-1)a_0 x^r + (1+r)r a_1 x^{r+1} + 2(r)a_0 x^{r+1} - r a_0 x^r - (1+r)a_1 x^{1+r} - a_0 x^{1+r} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1)a_n + 2(n+r-1)a_{n-1} - (n+r)a_n + a_{n-2} - a_{n-1}\right]x^{n+r} = 0$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریب x^r همیشه همان معادله مشخصه حاصل می شود.

ضریب x^r را مساوی صفر قرار می دهیم :

$$a_0(r^2 - r - r) = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r^2 - 2r = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

ضریب x^{r+1} را مساوی صفر قرار می دهیم :

$$(1+r)r a_1 + 2r a_0 - (1+r)a_1 - a_0 = 0 \xrightarrow{r_1=2}$$

$$6a_1 + 4a_0 - 3a_1 - a_0 = 0 \rightarrow 3a_1 + 3a_0 = 0 \rightarrow a_1 = -a_0$$

حال داخل سری را برابر صفر قرار می دهیم.

$$(n+r)(n+r-1)a_n + 2(n+r-1)a_{n-1} - (n+r)a_n + a_{n-2} - a_{n-1} = 0$$

$$\rightarrow (n+r)(n+r-2)a_n = -(2n+2r-3)a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{-(2n+2r-3)a_{n-1} - a_{n-2}}{(n+r)(n+r-2)} \qquad n \geq 2$$

ریشه بزرگتر $(r_1 = 2)$ را قرار می دهیم تا y_1 حاصل شود.

$$a_n = \frac{-(2n+1)a_{n-1} - a_{n-2}}{(n^2+2n)}$$

$$\begin{cases} n=2 \rightarrow a_2 = \dfrac{-5a_1 - a_0}{8} \xrightarrow{a_1=-a_0} a_2 = \dfrac{1}{2}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3 = \dfrac{-7a_2 - a_1}{15} \longrightarrow a_3 = -\dfrac{1}{6}a_0 \end{cases}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \rightarrow y_1 = x^2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$

$$y_1 = x^2\left(a_0 - a_0 x + \frac{1}{2}a_0 x^2 - \frac{1}{6}a_0 x^3 + \cdots\right)$$

نکته : جواب y_2 مورد بحث ما نیست.

۴-۴- تمرین :

(۱) نوع نقاط $x = 0$ را برای معادلات زیر تعیین کنید.

1) $2x^2y''-3xy'+(1+x)y=0$
2) $3x^2y''+6xy'+(7-x)y=0$
3) $x^2y''+2xy'+(x^2-4)y=0$
4) $x^2y''2xy'+x^2y=0$
5) $(x-x^2)y''-(3x-2)y'+5y=0$
6) $x^2(x+1)y''+x(x-4)y'+4y=0$

(۲) نقاط غیر عادی معادلات زیر را با ذکر نوع معین کنید.

1) $x^2(x+1)y''+x(x-4)y'+4y=0$
2) $x^2y''+x(x^2-1)y'+(1-x^2)y=0$
3) $(1-x^2)y''-xy'+9y=0$
4) $(x^3-x)^3y''+(x+1)y'+y=0$
5) $2x(x-2)^2y''+3xy'+(x-2)y=0$
6) $2x^2y''-xy'+(x-1)y=0$

(۳) معادلات زیر را حول نقطه $x = 0$ به کمک سری های توانی حل کنید.

1) $y''+9y=0$
2) $y''+2x^2y=0$
3) $2y''-xy'-2y=0$
4) $y''-x^2y'-2xy=0$
5) $(2+x^2)y''+5xy'+4y=0$
6) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

(۴) در مسائل زیر نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه غیر عادی و منظم معادله است پس جواب عمومی را بصورت سری بیابید.

1) $2x^2y''+xy'-(1+x)y=0$
2) $xy''+(x^2+1)y'-y=0$
3) $x^2y''+x(x+1)y'-y=0$
4) $(x-x^2)y''-(3x-1)y'-y=0$
5) $x^2y''+xy'+x^2y=0$
6) $2x^2y''-5xy'+(6-x)y=0$
7) $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$
8) $xy''+y'+2y=0$
9) $xy''+y'+2xy=0$
10) $x^2y''-3xy'+4(1+x)y=0$

فصل پنجم : تبدیل لاپلاس

۵-۱- مقدمه :

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ با دامنه $t\geq 0$ را بصورت $L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-St}f(t)dt$ تعریف می کنیم و آن را با $F(S)$ نشان می دهیم. اگر این انتگرال موجود باشد، تابع $F(S)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و تابع $f(t)$ را لاپلاس معکوس $F(S)$ گوییم و نشان می دهیم :

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-St}f(t)dt=F(S) \qquad S>0$$

$$L\{f(t)\}=F(S) \quad , \quad L^{-1}\{F(S)\}=f(t)$$

تبدیل لاپلاس توابع را همیشه با حروف بزرگ متناظر نشان می دهیم یعنی تبدیل لاپلاس $g(t)$ را با $G(S)$ و تبدیل لاپلاس $h(t)$ را با $H(S)$ و ...

نکته : تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی اند.

$$L\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_nf_n(t)\}=c_1L\{f_1(t)\}+c_2L\{f_2(t)\}+\cdots+c_nL\{f_n(t)\}$$

$$L^{-1}\{c_1F_1(S)+c_2F_2(S)+\cdots\}=c_1L^{-1}\{F_1(S)\}+c_2L^{-1}\{F_2(S)\}+\cdots$$

شرایط وجود تبدیل لاپلاس : اگر $f(t)$ روی هر فاصله متناظر $[0,T]$ پیوسته قطعه ای باشد و برای هر $t\geq T$ هم مرتبه نمایی با e^{at} باشد لاپلاس $f(t)$ وجود دارد.

نکته : اگر $L\{f(t)\}=F(S)$ ، باید $\lim\limits_{S\to\infty}F(S)=0$

نکته : اگر $\lim\limits_{S\to\infty}F(S)\neq 0$ باشد آنگاه $F(S)$ لاپلاس وارون ندارد.

اثبات فرمول های لاپلاس :

1) $L\{a\}=\dfrac{a}{S}$ 　　　(a عدد ثابت)

اثبات :

$$L\{a\}=\int_0^\infty ae^{-St}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b ae^{-St}dt \xrightarrow{S>0} \lim_{b\to\infty}-\frac{a}{S}e^{-St}\Big|_0^b=\frac{a}{S} \qquad (S>0)$$

2) $L\{t^n\}=\dfrac{n!}{S^{n+1}}\overset{or}{=}\dfrac{\Gamma(n+1)}{S^{n+1}}$ 　　　(n صحیح و $n>-1$)

اثبات :

$$L\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-St}t^ndt\overset{\text{جز به‌جز}}{=}-\frac{t^ne^{-st}}{S}\Big|_0^\infty+\frac{n}{S}\int_0^\infty e^{-St}t^{n-1}dt\overset{\text{دوباره‌جز به‌جز}}{=}$$

$$\frac{n}{S}L\left\{t^{n-1}\right\}=\frac{n}{S}\left(\frac{n-1}{S}\right)L\left\{t^{n-2}\right\}=\cdots=\frac{n!}{S^n}L\{1\}=\frac{n!}{S^n}L\left\{\frac{1}{S}\right\}=\frac{n!}{S^{n+1}}\quad (S>0)$$

3) $L\left\{e^{at}\right\}=\dfrac{1}{S-a}$

$$L\left\{e^{at}\right\}=\int_0^\infty e^{-St}e^{at}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{t(a-S)}\,dt=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{a-S}e^{(a-S)t}\Big|_0^b \xrightarrow{S>a} =\frac{1}{S-a}\quad (S>a)$$

4) $L\{\sin at\}=\dfrac{a}{S^2+a^2}\quad (S>0)$ 5) $L\{\cos at\}=\dfrac{S}{S^2+a^2}\quad (S>0)$

برای اثبات فرمول لاپلاس این دو تابع یا می توانیم مستقیم از روی تعریف لاپلاس عمل کنیم یا از طریق فرمول اویلر بدست آوریم.

اثبات :

$$e^{iat}=\cos at+i\sin at \longrightarrow L\left\{e^{iat}\right\}=L\{\cos at\}+iL\{\sin at\}$$

$$L\left\{e^{iat}\right\}=\frac{1}{S-ia}\overset{*}{=}\frac{S+ia}{S^2+a^2}=\frac{S}{S^2+a^2}+i\frac{a}{S^2+a^2}$$

* ضرب مزدوج

پس نتیجه می گیریم :

$L\{\cos at\}=\dfrac{S}{S^2+a^2}$ و $L\{\sin at\}=\dfrac{a}{S^2+a^2}$

6) $L\{\sinh at\}=\dfrac{a}{S^2-a^2}\quad (S>|a|)$ 7) $L\{\cosh at\}=\dfrac{S}{S^2-a^2}\quad (S>|a|)$

$$L\{\cosh at\}=L\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S-a}+\frac{1}{S+a}\right)=\frac{S}{S^2-a^2}$$

$$L\{\sinh at\}=L\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S-a}-\frac{1}{S+a}\right)=\frac{a}{S^2-a^2}$$

مثال (۱) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $L\left\{t^2\right\}=\dfrac{2!}{S^3}$

2) $L\{3\}=\dfrac{3}{S}$

3) $L\left\{e^{3t}\right\}=\dfrac{1}{S-3}$

4) $L\left\{e^{-2t}\right\}=\dfrac{1}{S+2}$

5) $L\{\sin 2t\}=\dfrac{2}{S^2+4}$

6) $L\left\{\cos\sqrt{\pi}\,t\right\}=\dfrac{S}{S^2+\pi}$

7) $L\{\sinh t\}=\dfrac{1}{S^2-1}$

8) $L\{\cosh 4t\}=\dfrac{S}{S^2-16}$

مثال (۲) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=t^2+e^{3t}+\cos 4t+3 \rightarrow$$

$$L\{f(t)\}=L\{t^2\}+L\{e^{3t}\}+L\{\cos 4t\}+L\{3\}$$

$$\rightarrow F(S)=\frac{2!}{S^3}+\frac{1}{S-3}+\frac{S}{S^2+16}+\frac{3}{S}$$

$$2)\ f(t)=t^6+e^{-2t}+\sin 2t+\cosh 3t \rightarrow$$

$$L\{f(t)\}=L\{t^6\}+L\{e^{-2t}\}+L\{\sin 2t\}+L\{\cosh 3t\}$$

$$\rightarrow F(S)=\frac{6!}{S^7}+\frac{1}{S+2}+\frac{2}{S^2+4}+\frac{S}{S^2-9}$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 0 & x\ge 1 \end{cases}$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-Sx}f(x)dx=\int_0^1 xe^{-Sx}dx+0=\frac{xe^{-Sx}}{-S}\Big|_0^1-\frac{e^{-Sx}}{S^2}\Big|_0^1$$

$$\rightarrow F(S)=-\frac{e^{-S}}{S}-\frac{e^{-S}}{S^2}+\frac{1}{S^2}$$

۵-۱-۱- تمرین : لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=3t^8+\cos 2t+\cosh 2t$$

$$2)\ f(t)=e^{-3t}+t^2+6t-3$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ x & x\ge 1 \end{cases}$$

۵-۲- قضایای تبدیلات لاپلاس :

۵-۲-۱- قضیه انتقال (انتقال بر محور S ها) :

$$L\{e^{at}f(t)\}=L\{f(t)\}\big|_{S-a}=F(S-a)$$

اثبات :

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-Sx}e^{at}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(S-a)}f(t)dt \xrightarrow{S-a=S'}$$

$$=\int_0^\infty e^{-S'x}f(t)dt=F(S')=F(S-a)$$

نکته : می توان نتیجه گرفت که برای محاسبه $L\{e^{at}f(t)\}$ ابتدا با e^{at} کاری نداریم، $L\{f(t)\}$ را محاسبه می کنیم سپس متغیر S را به $S-a$ تغییر می دهیم :

مثال (۳) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=e^{2t}\sin 2t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^{2t}\sin 2t\}$$

$$\rightarrow F(S)=\left.\frac{2}{S^2+4}\right|_{S-2}=\frac{2}{(S-2)^2+4}$$

$$2)\ f(t)=e^{-t}\cos 4t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^{-t}\cos 4t\}$$

$$\rightarrow F(S)=\left.\frac{S}{S^2+16}\right|_{S+1} \rightarrow F(S)=\frac{S+1}{(S+1)^2+16}$$

$$3)\ f(t)=\cosh 3t\cos 2t \quad \rightarrow \quad f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-3t}\right)\cos 2t$$

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{2}L\{e^{3t}\cos 2t\}+\frac{1}{2}\left(e^{-3t}\cos 2t\right)$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{s-3}{(s-3)^2+4}+\frac{1}{2}\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

۵-۲-۲- قضیه دوم : مشتق تبدیل لاپلاس :

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)=(-1)^nF^{(n)}(s) \qquad (n \text{ عدد صحیح و مثبت})$$

به عنوان مثال :

$$L\{tf(t)\}=-F'(s)$$

$$L\{t^2f(t)\}=F''(s)$$

اثبات :

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \rightarrow \text{مشتق نسبت به } s$$

$$\frac{d}{ds}L\{f(t)\}=\int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt=-L\{tf(t)\}\rightarrow s \text{ مشتق دوباره نسبت به }$$

$$\frac{d^2}{ds^2}L\{f(t)\}=\int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt=L\{t^2f(t)\}$$

به همین ترتیب با n بار مشتق گیری نسبت به s خواهیم داشت :

$$\frac{d^n}{ds^n}L\{f(t)\}=(-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-st}f(t)dt=(-1)^n L\{t^n f(t)\}$$

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))$$

مثال (۴) لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ f(t)=t\sin t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{t\sin t\}\rightarrow F(s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\rightarrow F(s)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$2)\ L\{t^2\sin 2t\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

$$3)\ f(t)=te^{-t}\cos 2t \rightarrow L\{f(t)\}=L\{te^{-t}\cos 2t\}$$

$$F(s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)=\frac{s^2+2s-3}{(s^2+2s+5)^2}$$

نکته : در مورد لاپلاس تابع $f(t)=t^n e^{at}$ الویت با تابع انتقال است :

$$4)\ f(t)=t^6e^{3t} \rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^{3t}t^6\} \rightarrow F(s)=\frac{6!}{(s-3)^7}$$

۵-۲-۲- قضیه سوم : (تبدیل لاپلاس انتگرال) :

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ موجود باشد، آنگاه

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

اثبات : $L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)dt \rightarrow$ جز به جز

$$\begin{cases} u=\int_0^t f(x)dx \rightarrow du=f(t)dt \\ dv=e^{-st}dt \rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{cases}$$

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(x)dx\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

توجه : برای محاسبه لاپلاس انتگرال یعنی $L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}$ ، ابتدا انتگرال را کنار گذاشته و لاپلاس تابع داخل انتگرال را می یابیم سپس حاصل را (به خاطر انتگرال) در $\frac{1}{s}$ ضرب می کنیم.

مثال (۵) محاسبه کنید :

$$1)\ L\left\{\int_0^t \sinh 4x\,dx\right\}=\frac{1}{s}\left(\frac{4}{s^2-16}\right)$$

$$2)\ L\left\{\int_0^t \left(e^x-\cos x+1\right)dx\right\}=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s}\right)$$

۵-۲-۴- قضیه (۴) انتگرال تبدیل لاپلاس :

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم و $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد :

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty} L\{f(t)\}dp \quad\rightarrow\quad L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty} F(p)dp$$

اثبات :

$$\int_s^{+\infty} F(p)dp=\int_s^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt\,dp=\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{-pt}f(t)dp\,dt$$

$$=\int_0^{\infty} f(t)\left(\int_s^{\infty} e^{-pt}\,dp\right)dt=\int_0^{\infty} f(t)\left(-\frac{1}{t}e^{-pt}\right)_s^{\infty}dt=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}dt=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

توجه : برای محاسبه $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$، t رادر مخرج نادیده می گیریم، ابتدا $L\{f(t)\}$ را محاسبه می کنیم و سپس از حاصل (به خاطر t مخرج) انتگرال می گیریم :

مثال (۶) تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin t}{t}$ را بیابید.

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^{\infty}\frac{1}{p^2+1}dp=\tan^{-1}p\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s=\cot^{-1}s=\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

نکته : $\tan^{-1}u+\cot^{-1}u=\frac{\pi}{2}$ و $\tan^{-1}u=\cot^{-1}\frac{1}{u}$ و $\cot^{-1}u=\tan^{-1}\frac{1}{u}$

مثال (۷) تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\cos t-1}{t}$ را بیابید.

$$L\left\{\frac{\cos t-1}{t}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p}\right)dp=\frac{1}{2}\ln\left|p^2+1\right|-\ln p\Big|_s^\infty$$

$$=\lim_{u\to\infty}\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}\Bigg|_s^u=0-\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}=\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

۵-۲-۵- مثال های تکمیلی از مبحث لاپلاس :

مثال (۸) لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

$$1)\ L\{\cos 2t\cos t\}=\frac{1}{2}L\{\cos 3t+\cos t\}=\frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+9}+\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$2)\ L\{\sinh 2t\cos 4t\}=\frac{1}{2}L\left\{\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)\cos 4t\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+16}-\frac{s+2}{(s+2)^2+16}\right]$$

$$3)\ L\{\sin^2 t\}=L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(L\{1\}-L\{\cos 2t\}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$4)\ L\{\sin(at+b)\}=L\{\sin at\cos b+\cos at\sin b\}=\cos b\frac{a}{s^2+a^2}+\sin b\frac{s}{s^2+a^2}$$

مثال (۹) لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

$$f(x)=xe^{2x}\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt$$

$$L\left\{e^{-2t}\left(1-e^{-t}\right)\right\}=L\left\{e^{-2t}-e^{-3t}\right\}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$L\left\{e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}\overset{\text{قضیه}4}{=}\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+3}\right)dp=$$

$$\lim_{u\to\infty}\left(\ln(p+2)-\ln(p+3)\right)_s^u=\lim_{u\to\infty}\ln\frac{p+2}{p+3}\Bigg|_s^u=\lim_{u\to\infty}\ln\frac{u+2}{u+3}-\ln\frac{s+2}{s+3}=\ln\frac{s+3}{s+2}$$

$$L\left\{\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\}\overset{\text{قضیه}3}{=}\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+2}$$

$$L\left\{e^{2x}\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\}\overset{\text{قضیه}1}{=}\frac{1}{s-2}\ln\frac{s+1}{s}$$

$$L\{f(x)\}=L\left\{xe^{2x}\int_0^x e^{-2t}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\right\} \to F(s)=-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-2}\ln\frac{s+1}{s}\right]$$

مثال (۱۰) لاپلاس تابع زیر را بیابید ؟

$$f(t)=\frac{\sin 4t}{t}+e^t\int_0^t\frac{\cos u}{u}\sinh u\,du$$

$$f_1(t)=\frac{\sin 4t}{t} \quad , \quad f_2(t)=e^t\int_0^t\frac{\cos u}{u}\sinh u\,du$$

$$L\{f_1(t)\}=L\left\{\frac{\sin 4t}{t}\right\} \to F_1(s)=\int_s^\infty\frac{4}{p^2+16}dp=\frac{4}{4}\tan^{-1}\frac{p}{4}\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{4}=\cot^{-1}\frac{s}{4}$$

$$L\{f_2(t)\}=L\left\{\frac{e^t}{2}\int_0^t\frac{\cos u}{u}(e^u-e^{-u})du\right\}=F_2(s)$$

$$L\{\cos u(e^u-e^{-u})\}=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$L\left\{\frac{\cos u(e^u-e^{-u})}{u}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right)dp$$

$$\to \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\ln((p-1)^2+1)-\ln((p+1)^2+1)\right]_s^A=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\ln\frac{(p-1)^2+1}{(p+1)^2+1}\right]_s^A$$

$$=\frac{1}{2}\left[0-\ln\frac{(s-1)^2+1}{(s+1)^2+1}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{(s+1)^2+1}{(s-1)^2+1}$$

$$L\left\{\int_0^t\frac{\cos u}{u}(e^u-e^{-u})du\right\}=\frac{1}{2s}\ln\frac{(s+1)^2+1}{(s-1)^2+1}$$

$$L\{f_2(t)\}=L\left\{\frac{e^t}{2}\int_0^t\frac{\cos u(e^u-e^{-u})du}{u}\right\}$$

$$F_2(s)=\frac{1}{4(s-1)}\ln\frac{s^2+1}{(s-2)^2+1}$$

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s) \to F(s)=\cot^{-1}\frac{s}{4}+\frac{1}{4(s-1)}\ln\frac{s^2+1}{(s-2)^2+1}$$

مثال (۱۱) لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f(t)=t^2\int_0^t e^{2x-t}\sin 5x\,dx \rightarrow f(t)=t^2e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx$$

$$L\{\sin 5x\}=\frac{5}{s^2+25} \quad , \quad L\{e^{2x}\sin 5x\}=\frac{5}{(s-2)^2+25}$$

$$L\left\{\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\}=\frac{1}{s}\left[\frac{5}{(s-2)^2+25}\right] \rightarrow L\left\{e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\}=\frac{1}{s+1}\left[\frac{5}{(s-1)^2+25}\right]$$

$$L\{f(t)\}=L\left\{t^2e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin 5x\,dx\right\} \rightarrow F(s)=\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s+1}\left(\frac{5}{(s-1)^2+25}\right)\right]$$

مثال (۱۲) اگر $L\{f(t)\}=F(s)$، نشان دهید $L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=aF(as)$

$$L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}f\left(\frac{t}{a}\right)dt \rightarrow \frac{t}{a}=u \rightarrow dt=a\,du$$

$$\rightarrow a\int_0^\infty e^{-asu}f(u)du=a\int_0^\infty e^{-asu}f(u)du=aF(as)$$

۵-۲-۶- تمرین :

(۱) لاپلاس توابع زیر را بگیرید.

1) $f(t)=\cos^2 t$

2) $f(t)=\sin^3 t$

3) $f(t)=t^2e^{3t}\cos 2t$

4) $f(t)=\dfrac{2(1-\cos t)}{t}$

5) $f(t)=te^{-t}\int_0^t \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}dx$

6) $f(t)=\sinh^2 2t$

7) $f(t)=\sinh at\cos at$

8) $f(x)=\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x}$

9) $f(t)=\begin{cases}\sin 3t & 0\le t<\pi\\ 3 & t\ge\pi\end{cases}$

10) $f(t)=\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$

11) $f(x)=\int_0^x e^t(t^2+\sin 2t)dt$

12) $f(x)=(e^x+1)^2+\sin^2 x\sin 2x$

13) $f(t)=\sin 2t\cos 2t+\sin^3 t$

(۲) نشان دهید $L\{f(t)\cosh at\}=\frac{1}{2}[F(s-a)+F(s+a)]$ سپس تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=\sin at\cosh at$

2) $f(t)=\cos^2 t\cosh t$

۵-۳- حل انتگرال ها به کمک تعریف لاپلاس :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = L\{f(t)\} = F(s)$$

مثال (۱۴) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید ؟

$$1)\ \int_0^\infty e^{-2t}\cos 3t\,dt = L\{\cos 3t\}_{s=2} = \left.\frac{s}{s^2+9}\right|_{s=2} = \frac{2}{13}$$

$$2)\ \int_0^\infty x e^{-4x}\cos 2x\,dx = L\{x\cos 2x\}_{s=4} = \left.\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\right|_{s=4} = \frac{12}{400}$$

$$3)\ \int_0^\infty e^{-3x} x\sinh 2x\,dx = \int_0^\infty e^{-3x} x\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-x} x\,dx - \int_0^\infty e^{-5x} x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=1} - \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=5}\right] = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{25}\right) = \frac{12}{25}$$

مثال (۱۵) نشان دهید : $\left(\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}dt = \cot^{-1} a\right)$

$$\int_0^\infty e^{-at}\frac{\sin t}{t}dt = L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}_{s=a} \overset{*}{=} \cot^{-1} s\Big|_{s=a} = \cot^{-1} a$$

$$*\quad L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \tan^{-1} s\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \cot^{-1} a$$

مثال (۱۶) حاصل انتگرال های زیر را بیابید ؟

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\sin t}{e^{\sqrt{3}t}\,t}dt = \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}t}\frac{\sin t}{t}dt = L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}_{s=\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$2)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty e^{0x}\frac{\sin x}{x}dx = L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}_{s=0} = \tan^{-1}\left.\frac{1}{s}\right|_{s=0} = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$3)\ \int_0^\infty 3^{-x}\sin 2x\,dx = \int_0^\infty e^{\ln 3^{-x}}\sin 2x\,dx = \int_0^\infty e^{(-\ln 3)x}\sin 2x\,dx$$

$$= L\{\sin 2x\}_{s=+\ln 3} = \left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s=\ln 3} = \frac{2}{\ln^2 3+4}$$

۵-۳-۱- تمرین :

(۱) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos 2x - \cos 3x)}{x}dx$

2) $\int_0^\infty e^{-2x}\sin x\cos x\,dx$

3) $\int_0^\infty e^{-x}\sinh x\cos x\,dx$

4) $\int_0^\infty e^{-2t}\left(\int_0^t \frac{e^{-2x}-e^{-4x}}{x}dx\right)dt$

5) $\int_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\,dx$

6) $\int_0^\infty \int_0^x te^{3t-x}\frac{\sin t}{t}dt\,dx$

(۲) نشان دهید :

1) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin bt}{t}dt = \cot^{-1}\frac{a}{b}$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-4x}}{x}\cos 4x\,dx = -\frac{1}{2}\ln\frac{17}{32}$

3) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}dt = \frac{1}{2}\ln 2$

4) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \frac{\ln 5}{4}$

۵-۴- نتیجه ای از قضیه ۴ :

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp$$

حال کافیست به جای s صفر قرار دهیم :

پس :

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp$$

مثال (۱۷) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^\infty e^{-at}\frac{\sin t}{t}dt$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}dt = \int_0^\infty L\{e^{-at}\sin t\}dp = \int_0^\infty \frac{1}{(p+a)^2+1}dp = \tan^{-1}(p+a)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}a = \cot^{-1}a$$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}\right)dp = \ln(p+a) - \ln(p+b)\Big|_0^\infty = \ln\frac{p+a}{p+b}\Bigg|_0^\infty = 0 - \ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}$$

مثال (۱۸) تساوی های زیر را اثبات کنید ؟

1) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = \tan^{-1}p\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\ln 5$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \int_0^\infty L\left\{e^{-t}\sin^2 t\right\}dp$$

$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\left[\ln(p+1) - \frac{1}{2}\ln\left((p+1)^2+4\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+4}}\Bigg|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \ln\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = -\frac{1}{2}\ln 5^{-1/2} = \frac{1}{4}\ln 5$$

$$* \quad L\left\{\sin^2 t\right\} = L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$L\left\{e^{-t}\sin^2 t\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]$$

3) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\frac{1-\cos x}{x}}{x}dx = \int_0^\infty L\left\{\frac{1-\cos x}{x}\right\}dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp = \frac{\pi}{2}$$

$$L\left\{\frac{1-\cos x}{x}\right\} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)dp = \ln p - \frac{1}{2}\ln(p^2+1)\Big|_s^\infty$$

$$= \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\Bigg|_s^\infty = 0 - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s} = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$$

۵-۴-۱- تمرین :

(۱) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^\infty \frac{e^{-2t}\sin t\cosh t}{t}dt$

3) $\int_0^\infty \frac{\sin ax\cos bx}{x}dx$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-4t}}{t}\cos 4t\,dt$

4) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos 2x-\cos 3x)}{x}dx$

(۲) تساوی های زیر را اثبات کنید.

1) $\int_0^\infty \frac{\cos x-\cos 2x}{x}dx=\ln 2$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}dt=\frac{1}{2}\ln 2$

۵-۵- تابع گاما : (Γ)

تعریف : تابع گاما α را بصورت $\Gamma(\alpha)$ نشان می دهند :

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \qquad \alpha>-1$$

یا

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha}\,dx \qquad \alpha>0$$

قضیه : برای هر عدد حقیقی α داریم $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

اثبات :

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha}\,dx=\begin{cases} x^{\alpha}=u \quad\rightarrow\quad \alpha e^{\alpha-1}dx=du \\ e^{-x}dx=dv \quad\rightarrow\quad -e^{-x}=v \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha+1)=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \alpha e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx=0+\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

نکته : به ازای هر عدد طبیعی n داریم (n مثبت) $\Gamma(n+1)=n!$

$$\Gamma(1)=\Gamma(0+1)=0!=1$$

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1!=1$$

$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2!=2$$

$\vdots$

$$\Gamma(6)=\Gamma(5+1)=5!=120$$

نکته : $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$

نکته : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

$$\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\Gamma(-2)=\cdots=\Gamma(-n)=\infty$$

مثال (۱۹) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید ؟

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}dx=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \rightarrow$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}=u\\ x=u^2\rightarrow dx=2u\,du\end{cases} \rightarrow \ =\int_0^\infty \frac{e^{-u^2}2udu}{u}=2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

از طرفی $2\int_0^\infty e^{-u^2}du \cong 2\int_0^\infty e^{-v^2}dv$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\left(2\int_0^\infty e^{-u^2}du\right)\left(2\int_0^\infty e^{-v^2}dv\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}dudv$$

$$\rightarrow \begin{cases}u=r\cos\theta\\ v=r\sin\theta\end{cases} \rightarrow \ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty re^{-r^2}drd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta=\pi$$

پس : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

مثال (۲۰) مقادیر زیر را محاسبه کنید ؟

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$\vdots$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

$\vdots$

$$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

نکته : (α کسری) $L\{t^\alpha\}=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$

(n عدد صحیح و مثبت) $L\{t^n\}=\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

مثال (۲۱) لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

$$1)\ L\{\sqrt{t}\}=L\left\{t^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$2)\ L\{t\sqrt{t}\}=L\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^2\sqrt{s}}=\frac{3}{4s^2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$3)\ L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$4)\ L\left\{\frac{\cosh t}{\sqrt{t}}\right\}=L\left\{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\frac{1}{2}L\left\{\frac{e^t}{\sqrt{t}}+\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right\}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{s-1}}+\sqrt{\frac{\pi}{s+1}}\right)$$

۵-۵-۱- تمرین : لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

1) $f(t)=t^2\sqrt{t}$ 2) $f(t)=\dfrac{\sinh 2t}{t\sqrt{t}}$ 3) $f(t)=\dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$

۵-۵-۲- حل انتگرال ها توسط تابع گاما :

در این قسمت می خواهیم برخی از انتگرال ها را به کمک تابع گاما حل کنیم :

مثال (۲۲) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید ؟

$$\left(\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\,dx\right)$$

1) $\int_0^\infty e^{-x}x^3\,dx=\Gamma(3+1)=3!$

2) $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{te^t}}=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

3) $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx=\Gamma(n+1)=n!$

4) $\int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}x}x^2\,dx \;\rightarrow\; \frac{3}{2}x=u \;\rightarrow\; x=\frac{2}{3}u \;\rightarrow\; dx=\frac{2}{3}du$

$$\rightarrow\; \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{2}{3}u\right)^2\frac{2}{3}du=\frac{8}{27}\int_0^\infty e^{-u}u^2\,du=\frac{8}{27}\Gamma(2+1)=\frac{8}{27}2!=\frac{16}{27}$$

5) $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^2}\,dx \;\rightarrow\; x^2=u \;\rightarrow\; x=\sqrt{u} \;\rightarrow\; dx=\frac{du}{2\sqrt{u}}$

$$\int_0^\infty e^{-u}\sqrt[4]{u}\,\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{4}}\,du=\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

مثال (۲۳) حاصل انتگرال های زیر را بیابید ؟

1) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

$$\begin{cases}-\ln x=u \;\rightarrow\; \ln x=-u \;\rightarrow\; x=e^{-u} \;\rightarrow\; dx=-e^{-u}du\\ x=0 \;\rightarrow\; u=\infty\\ x=1 \;\rightarrow\; u=0\end{cases}$$

$$\int_\infty^0\frac{-e^{-u}du}{\sqrt{u}}=-\int_\infty^0 e^{-u}u^{\frac{-1}{2}}du=\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{-1}{2}}du=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

2) $\int_0^1\sqrt{t}\ln^2 t\,dt$

$$\int_0^1\sqrt{t}(-\ln t)^2\,dt \;\rightarrow$$

$$\begin{cases}-\ln t=u \;\rightarrow\; \ln t=-u \;\rightarrow\; t=e^{-u} \;\rightarrow\; dt=-e^{-u}du\\ t=0 \;\rightarrow\; u=\infty\\ t=1 \;\rightarrow\; u=0\end{cases}$$

$$=\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{u}{2}}(u)^2\left(-e^{-u}\right)du=\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}u}u^2du \rightarrow \frac{3}{2}u=A \rightarrow u=\frac{2}{3}A \rightarrow du=\frac{2}{3}dA$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-A}\left(\frac{2}{3}A\right)^2\frac{2}{3}dA=\frac{8}{27}\int_{0}^{\infty} e^{-A}A^2dA=\frac{8}{27}\Gamma(2+1)=\frac{16}{27}$$

3) $\int_{0}^{1} t^4\ln^3 t\,dt=-\int_{0}^{1} t^4(-\ln t)^3\,dt$

$$\begin{cases} -\ln t=u \rightarrow \ln t=-u \rightarrow t=e^{-u} \rightarrow dt=-e^{-u}du \\ t=0 \rightarrow u=\infty \\ t=1 \rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$=-\int_{\infty}^{0} e^{-4u}u^3\left(-e^{-u}\right)du=-\int_{0}^{\infty} e^{-5u}u^3du \rightarrow 5u=A \rightarrow u=\frac{A}{5} \rightarrow du=\frac{dA}{5}$$

$$=-\int_{0}^{\infty} e^{-A}\frac{A^3}{125}\frac{dA}{5}=-\frac{1}{625}\int_{0}^{\infty} e^{-A}A^3dA=-\frac{1}{625}\Gamma(3+1)=\frac{-3!}{625}=\frac{-6}{625}$$

مثال (۲۴) ثابت کنید :

$$\int_{0}^{1} x^m(\ln x)^n\,dx=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$$-\ln x=u \rightarrow \ln x=-u \rightarrow x=e^{-u} \rightarrow dx=-e^{-u}du$$

$$=\int_{\infty}^{0} e^{-mu}(-u)^n\left(-e^{-u}\right)du=(-1)^n\int_{0}^{\infty} e^{-(m+1)u}u^ndu \rightarrow$$

$$\rightarrow (m+1)u=A \rightarrow u=\frac{A}{m+1} \rightarrow du=\frac{dA}{m+1}$$

$$=(-1)^n\int_{0}^{\infty} e^{-A}\frac{A^n}{(m+1)^n}\frac{dA}{(m+1)}=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n)=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

مثال (۲۵) انتگرال زیر را به کمک تابع گاما محاسبه کنید ؟

$\int_{0}^{\infty} 10^{-x}x^8\,dx=$

نکته : $e^{\ln x}=x$

$$\int_{0}^{\infty} e^{\ln 10^{-x}}x^8\,dx=\int_{0}^{\infty} e^{-(\ln 10)x}x^8\,dx=$$

$$\rightarrow (\ln 10)x=u \rightarrow dx=\frac{du}{(\ln 10)}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^8}{(\ln 10)^8}\frac{du}{(\ln 10)}=\frac{1}{(\ln 10)^9}\int_{0}^{\infty} e^{-u}u^8\,du=\frac{8!}{(\ln 10)^9}$$

مثال (۲۶) حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید ؟

$$\int_0^1 \frac{\left(x-x^2\right)}{\ln x}dx =$$

$$-\ln x = u \rightarrow \ln x = -u \rightarrow x = e^{-u} \rightarrow dx = -e^{-u}du$$

$$= \int_\infty^0 \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{-u}\left(-e^{-u}du\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-3u}-e^{-2u}}{u}du = \int_0^\infty \left(\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+2}\right)dp$$

$$= \ln(p+3)-\ln(p+2)\Big|_0^\infty = \ln\frac{p+3}{p+2}\Bigg|_0^\infty = 0-\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{3}$$

مثال (۲۷) انتگرال زیر را به کمک تابع گاما محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty e^{-x^3}dx =$$

$$x^3 = u \rightarrow 3x^2dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} = \frac{du}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{3\sqrt[3]{u^2}} = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{2}{3}}du = \frac{1}{3}\Gamma\left(-\frac{2}{3}+1\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$$

۵-۵-۳- تمرین :

(۱) انتگرال های زیر را به کمک تابع گاما محاسبه کنید.

1) $\int_0^1 x^{\frac{1}{5}}e^{3\sqrt{x}}dx$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln(1/x)}}$

3) $\int_0^1 (-\ln x)^a dx$

4) $\int_0^1 \sqrt[3]{t}\ln^4 t\,dt$

5) $\int_0^1 3^{-6x^2}dx$

6) $\int_0^\infty \frac{x-1}{\sqrt{-\ln x}}dx$

7) $\int_0^1 \frac{x^3-x}{\ln x}dx$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tan^3 x+\tan^5 x\right)e^{-\tan^2 x}dx$

9) $\int_0^\infty (x+1)^2 e^{-x^3}dx$

10) $\int_0^\infty 3^{-x}x^4dx$

11) $\int_0^1 x^2\ln^3 x\,dx$

(۲) نشان دهید :

1) $\int_0^\infty a^{-bx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b\ln a}} \quad (a,b>1)$

2) $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$

3) $\int_0^1 9x^2\ln^3 x\,dx = -\frac{2}{3}$

4) $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx = \ln 2$

۵-۶- تابع پله ای واحد (تابع هوی ساید) :

تعریف $u_c(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<c\\ 1 & t\ge c\end{cases}$ که $c\ge 0$ است، به تابع پله ای واحد معروف است و نمودار آن بفرم زیر است :

شکل ۵-۱ : تابع پله ای واحد

حالات خاص :

$$u_0(t)=\begin{cases}0 & 0<t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}=1 \;\rightarrow\; u_0(t)=1$$

$$u_\infty(t)=\begin{cases}0 & t<\infty\\ 1 & t>\infty\end{cases}=0 \;\rightarrow\; u_\infty(t)=0$$

نکته : $(a<b)$ $\quad f(t)=u_a(t)-u_b(t)$ را می توانیم به فرم زیر بنویسیم :

$$f(t)=u_a(t)-u_b(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & a\le t<b\\ 0 & t\ge b\end{cases}=\begin{cases}1 & a\le t<b\\ 0 & o.w\end{cases}$$

با استفاده از این نکته می توان هر تابع چند ضابطه ای را برحسب تابع پله ای واحد نوشت :

$$L\{u_c(t)\}=\frac{e^{-cs}}{s}\qquad (s>0)$$

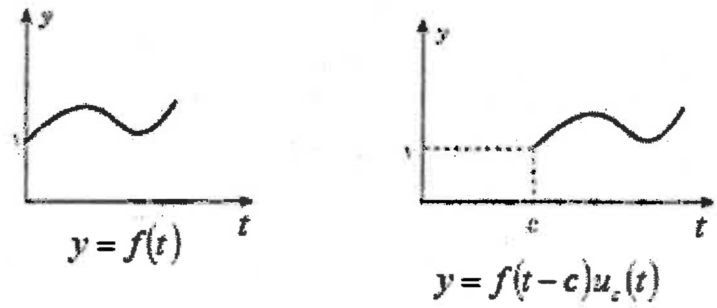
اثبات :

$$L\{u_c(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)dt=\int_0^c e^{-st}(0)dt+\int_c^\infty e^{-st}(1)dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_c^\infty=\frac{1}{s}e^{-cs}$$

قضیه انتقال بر محور x ها یا t ها :

$$y=f(t-c)u_c(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<c\\ f(t-c) & t\ge c\end{cases}$$

نمایش شکل زیر انتقال تابع f به اندازه c واحد در جهت مثبت محور t می باشد.



شکل ۵-۲

حال :

$$L\{u_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}F(s)$$

نکته : اثبات همانند تابع پله ای واحد.

نکته : در حالت کلی اگر تابع f (t) با حوزه تعریف نامنفی باشد و با ضابطه زیر تعریف شود، داریم :

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & 0\le t<c_1 \\ f_2(t) & c_1\le t<c_2 \\ f_3(t) & c_2\le t<c_3 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(t) & \cdots\quad t>c_{n-1} \end{cases}$$

$$f(t)=f_1(t)\left(u_0(t)-u_{c_1}(t)\right)+f_2(t)\left(u_{c_1}(t)-u_{c_2}(t)\right)+\cdots$$

$$\to\quad f(t)=f_1(t)+\left(f_2(t)-f_1(t)\right)u_{c_1}(t)+\left(f_3(t)-f_2(t)\right)u_{c_2}(t)+\cdots$$

مثال (۲۸) از توابع زیر لاپلاس بگیرید ؟

1) $L\{u_2(t)\}=\frac{1}{s}e^{-2s}$

2) $L\left\{u_3(t)(t-3)^2\right\}=\frac{2!}{s^3}e^{-3s}$

3) $L\{u_\pi(t)\sin(t-\pi)\}=\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}$

4) $L\{u_2(t)t\}=L\{u_2(t)(t-2+2)\}=L\{u_2(t)(t-2)\}+2L\{u_2(t)\}=e^{-2s}\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}e^{-2s}$

5) $L\{u_3(t)t^2\}=L\{u_3(t)(t-3+3)^2\}=L\{u_3(t)(t-3)^2+6(t-3)+9\}=e^{-3s}\left[\frac{2!}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right]$

مثال (۲۹) از توابع زیر لاپلاس بگیرید ؟

1) $f(t)=u_4(t)e^{-2t}$

$$\rightarrow\quad L\{f(t)\}=L\{u_4(t)e^{-2(t-4+4)}\}=e^{-8}L\{u_4(t)e^{-2(t-4)}\}$$

$$F(s)=e^{-8}\frac{e^{-4s}}{s+2}$$

2) $f(t)=u_\pi(t)\sin 2t \quad\rightarrow\quad L\{f(t)\}=L\{u_\pi(t)\sin 2(t-\pi+\pi)\}$

$$F(s)=L\{u_\pi(t)(\sin 2(t-\pi)\cos 2\pi+\cos 2(t-\pi)\sin 2\pi)\}$$

$$F(s)=L\{u_\pi(t)\sin 2(t-\pi)\}\quad\Rightarrow\quad F(s)=e^{-\pi s}\frac{2}{s^2+4}$$

3) $f(t)=u_2(t)\cos t \quad\rightarrow\quad L\{f(t)\}=L\{u_2(t)\cos(t-2+2)\}$

$$F(s)=L\{u_2(t)(\cos(t-2)\cos 2-\sin(t-2)\sin 2)\}$$

$$F(s)=e^{-2s}\left[\cos 2\frac{s}{s^2+1}-\sin 2\frac{1}{s^2+1}\right]$$

4) $f(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^t\cos 2t \quad\rightarrow\quad L\{f(t)\}=L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$$F(s)=e^{\frac{\pi}{2}}L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\left(\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi-\sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi\right)\right\}$$

$$F(s)=-e^{\frac{\pi}{2}}L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\quad\rightarrow\quad F(s)=-e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s-1}{(s-1)^2+4}$$

مثال (۳۰) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ t & t\ge 1\end{cases}\quad\rightarrow\quad f(t)=1+(t-1)u_1(t)$

$$L\{f(t)\}=L\{1\}+L\{(t-1)u_1(t)\}\quad\rightarrow\quad F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

2) $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t<\pi\\ \sin t+\cos t & t\ge\pi\end{cases}$

$$f(t)=\sin t+(\sin t+\cos t-\sin t)\,u_\pi(t)$$

$$f(t)=\sin t+u_\pi(t)\cos(t-\pi+\pi) \rightarrow$$

$$L\{f(t)\}=L\{\sin t\}+L\{u_\pi(t)[\cos(t-\pi)\cos\pi-\sin(t-\pi)\sin\pi]\}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$$3)\ f(t)=[t] \qquad (t>0)$$

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<1 \\ 1 & 1\le t<2 \\ 2 & 2\le t<3 \\ \vdots & \vdots \\ n & n\le t<n+1 \end{cases}$$

$$f(t)=0+u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+\cdots+u_n(t)$$

$$L\{f(t)\}=L\{u_1(t)\}+L\{u_2(t)\}+L\{u_3(t)\}+\cdots$$

$$F(s)=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-3s}+\cdots \rightarrow F(s)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}e^{-is}$$

نکته : روش دیگر برای محاسبه لاپلاس توابع پله ای :

برای محاسبه $L\{u_c(t)f(t)\}$ به ازای تابع پله ای، e^{-cs} می نویسیم، سپس $L\{f(t+c)\}$ را می یابیم.

مثال (۳۱) لاپلاس توابع زیر را با روش بالا محاسبه کنید ؟

$$1)\ L\{u_4(t)e^{-2t}\}=e^{-4s}L\{e^{-2(t+4)}\}=e^{-4s}e^{-8}\frac{1}{s+2}$$

$$2)\ L\{u_\pi(t)\sin t\}=e^{-\pi s}L\{\sin(t+\pi)\}=e^{-\pi s}L\{\sin t\cos\pi+\sin\pi\cos t\}=-e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$3)\ f(t)=\begin{cases} t^3 & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases}$$

$$f(t)=t^3-t^3u_1(t) \rightarrow L\{f(t)\}=L\{t^3\}-L\{u_1(t)t^3\}$$

$$F(s)=\frac{3!}{s^4}-e^{-s}L\{(t+1)^3\} \rightarrow F(s)=\frac{6}{s^4}-e^{-s}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

۵-۶-۱- تمرین :

از توابع زیر لاپلاس بگیرید :

1) $f(t)=(t^2-1)u_2(t)$

2) $f(x)=xe^x u_\pi(x)\cos 2x$

3) $f(t)=\begin{cases} 3t & 0\le t<\pi \\ \cos t+\sin t & t\ge\pi \end{cases}$

4) $f(t)=x-[x]$

5) $f(x)=[x^2]$

6) $f(x)=[\sqrt{x}]$

7) $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<\pi \\ 1+\cos t & t>\pi \end{cases}$

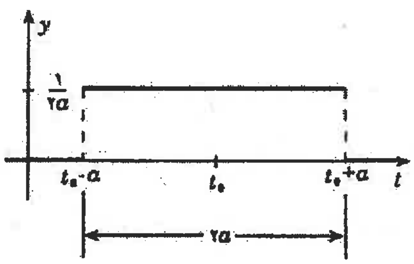
8) $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<2 \\ t+t^2 & 2\le t<\pi \\ t^2+\sin t & \pi\le t<5 \\ \sin t+e^{-2t} & t\ge 5 \end{cases}$

۵-۷- تابع ضربه ای : (دلتای دیراک)

تابع ضربه ای، تابعی است که در یک فاصله زمانی کوتاه مقدار بسیار بزرگتر دارد.

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a} & |t-t_0|<a \\ 0 & |t-t_0|\ge a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t-t_0)dt=1$$



شکل ۵-۳ : تابع ضربه ای

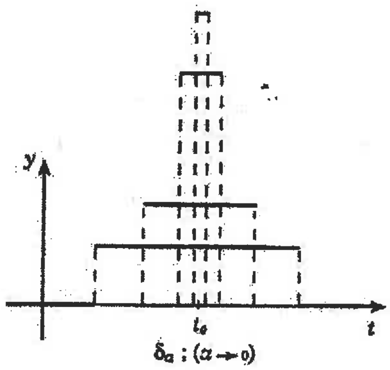
اگر در تابع ضربه ای $a\to 0$ میل کند به حاصل حد که با $\delta(t-t_0)$ نمایش می دهیم تابع دلتای دیراک می گویند.

$$\lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} \infty & t=t_0 \\ 0 & t\ne t_0 \end{cases}$$

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t-t_0)dt=1$

2) $\int_{0}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$



شکل ۵-۴ : تابع دلتای دیراک

تبدیل لاپلاس تابع $\delta(t-t_0)$:

$$L\{\delta(t-t_0)\}=e^{-t_0 s}$$

$$L\{\delta(t)\}=1$$

$$L\{f(t)\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}f(t_0)$$

مثال (۳۲) لاپلاس توابع زیر را بیابید ؟

1) $L\{\delta(t-1)\}=e^{-s}$

2) $L\{t^3\delta(t-2)\}=(2)^3e^{-2s}=8e^{-2s}$

3) $L\{\cos t\,\delta(t-2\pi)\}=\cos 2\pi e^{-2\pi s}=e^{-2\pi s}$

4) $L\{\delta(t-\pi)e^t\cos t\}=e^{-\pi s}e^{\pi}\cos\pi=e^{-\pi s}e^{\pi}(-1)$

۵-۷-۱- تمرین :

لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=\delta(t-3)e^{4t}$ 2) $f(t)=\delta(t-1)e^{2t}\cos 3t$ 3) $f(t)=\delta(t)\cos^2 t$

۵-۸- لاپلاس توابع متناوب

تبدیل لاپلاس توابع متناوب : اگر $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد داریم :

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

اثبات :

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$$

برای انتگرال دوم تغییر متغیر $t=u+T$ را می گیریم :

$$L\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_0^\infty e^{-s(u+T)}f(u+T)du=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$

از طرفی چون $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$ داریم :

$$L\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}L\{f(t)\}$$

$$\rightarrow\ L\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

مثال (۳۳) تبدیل لاپلاس توابع متناوب زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 2-t & 1\le t<2 \end{cases}\qquad f(t)=f(t+2)$$

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^2 e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-2s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}t\,dt+\int_1^2 e^{-st}(2-t)dt}{1-e^{-2s}}$$

از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$L\{f(t)\}=\frac{-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^1+\left(-\frac{2}{s}e^{-st}+\frac{t}{s}e^{-st}+\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_1^2}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{\frac{1}{s^2}\left(e^{-2s}-2e^{-s}+1\right)}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{s^2}\frac{(1-e^{-s})^2}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$$

2) $f(t)=\frac{k}{T}t \qquad 0<t<T \qquad f(t)=f(t+T) \qquad (k>0)$

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}=\frac{\int_0^T e^{-st}\frac{k}{T}t\,dt}{1-e^{-sT}}=\frac{k}{T(1-e^{-sT})}\int_0^T te^{-st}\,dt$$

$$=\frac{k}{Ts^2}-\frac{k}{s(e^{sT}-1)}$$

3) $f(t)=|\sin t| \qquad f(t)=f(t+\pi)$

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^\pi e^{-st}|\sin t|dt}{1-e^{-\pi s}}=\frac{\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt}{1-e^{-\pi s}}$$

از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$L\{f(t)\}=\frac{\frac{e^{-st}}{1+s^2}(-s\sin t-\cos t)\Big|_0^\pi}{1-e^{-\pi s}}=\frac{\frac{e^{-st}}{1+s^2}(0+1)-\frac{1}{1+s^2}(0-1)}{1-e^{-\pi s}}=\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$$

نکته : $\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin bt-b\cos bt)$

4) $f(t)=2t-[2t]$

می دانیم تابع بالا دوره تناوبش $\frac{1}{2}$ است.

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-\frac{1}{2}s}}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-st}(2t-[2t])dt}{1-e^{-\frac{s}{2}}}=\frac{2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-st}t\,dt-\int_0^{\frac{1}{2}} 0\times e^{-st}\,dt}{1-e^{-\frac{s}{2}}}$$

از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$=\frac{2\left(-\frac{t}{2}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{s}{2}}}=\frac{-\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{2}}-\frac{2}{s^2}e^{-\frac{s}{2}}+\frac{2}{s^2}}{1-e^{-\frac{s}{2}}}=\frac{2-2e^{-\frac{s}{2}}-se^{-\frac{s}{2}}}{s^2\left(1-e^{-\frac{s}{2}}\right)}$$

۵-۸-۱- تمرین : لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1) $f(t)=|\cos t| \quad t\geq 0 \quad f(t)=f(t+\pi)$

2) $f(t)=\begin{cases} t & 0\leq t<\pi \\ 2\pi-t & \pi\leq t<2\pi \end{cases} \quad f(t)=f(t+2\pi)$

3) $f(t)=t-[t] \quad (t>0)$ (متناوب است)

4) $f(t)=e^{x} \quad 0<x<2\pi \quad T=2\pi$

۵-۹- لاپلاس معکوس :

تعریف : فرض می کنیم تابع $f(t)$ بر بازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد و وقتی که $S\to\infty$ میل می کند $F(S)\to 0$ میل می کند، در این صورت تابعی مانند f، که به آن تبدیل معکوس F می گوییم را بصورت $L^{-1}\{F(S)\}=f(t)$ نمایش می دهیم.

نکته : پس اگر $\lim\limits_{S\to\infty}F(S)=0$ آنگاه تابع $F(S)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است در غیر این صورت تابعی مانند $f(t)$ وجود نخواهد داشت که $F(S)$ تبدیل لاپلاس آن باشد. با توجه به تبدیل لاپلاس توابع بیان شده، لاپلاس معکوس ها بصورت زیر تعریف می شوند.

1) $L^{-1}\left\{\frac{a}{s}\right\}=a$

2) $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^{n}$ (n صحیح)

3) $L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right\}=t^{\alpha}$ (α کسری)

4) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$

5) $L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at$

6) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at$

7) $L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}=\sinh at$

8) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}=\cosh at$

با استفاده ازخواص تبدیل لاپلاس که قبلاً ذکرشد،قضایای زیر نتیجه می شود.

1) $L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$

در این فرمول با محاسبه $L^{-1}\{F(s-a)\}$، a را حذف کرده و $L^{-1}\{F(s)\}$ را محاسبه می کنیم و سپس در e^{at} ضرب می کنیم.

2) $L^{-1}\left\{\frac{d^{n}}{ds^{n}}F(s)\right\}=(-1)^{n}t^{n}f(t) \;\to$

$$\to\begin{cases} n=1 \;\to\; L^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t) \\ n=2 \;\to\; L^{-1}\{F''(s)\}=t^{2}f(t) \end{cases}$$

برای محاسبه $L^{-1}\{F^{(n)}(s)\}$ به ازای مشتق n ام عبارت $(-1)^n t^n$ را قرار می دهیم، سپس $L^{-1}\{F(s)\}$ را محاسبه می کنیم.

$$3)\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(x)dx$$

برای محاسبه $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}$ ابتدا $\frac{1}{s}$ را حذف می کنیم، $L^{-1}\{F(s)\}$ را محاسبه کرده سپس از حاصل انتگرال می گیریم.

$$4)\ L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(p)dp\right\}=\frac{f(t)}{t}$$

برای محاسبه $L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(p)dp\right\}$، انتگرال را حذف کرده، لاپلاس معکوس تابع داخل انتگرال را محاسبه می کنیم، سپس حاصل را بر t تقسیم می کنیم.

$$5)\ L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=u_c(t)f(t-c)$$

برای محاسبه $L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}$، ابتدا به ازای e^{-cs}، تابع پله ای $u_c(t)$ را نوشته سپس $L^{-1}\{F(s)\}$ را می یابیم و در انتها t را به $t-c$ تغییر می دهیم.

نکته : توابعی مثل $\sin s$ ، $\cos s$ ، e^s ، $\ln s$ ، و تمام توابع گویا که درجه صورت از مخرج بیشتر است دارای لاپلاس معکوس نیستند.

مثال (۳۴) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید $\left(L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^n\right)$

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=1$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{s^2}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=t$$

$$3)\ F(s)=\frac{1}{s^3}\ \xrightarrow{n=2}\ L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2!}L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{1}{2}t^2$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{s^4}\ \xrightarrow{n=3}\ L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{1}{6}t^3$$

$$5)\ F(s)=\frac{4}{s^6}\ \xrightarrow{n=5}\ L^{-1}\{F(s)\}=\frac{4}{5!}L^{-1}\left\{\frac{5!}{s^{5+1}}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{1}{30}t^5$$

$$6)\ F(s)=\frac{1-2s+4s^2}{s^3}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$\rightarrow\ f(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+4$$

مثال (۳۵) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s-3} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \rightarrow f(t)=e^{3t}$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{s+1} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \rightarrow f(t)=e^{-t}$$

$$3)\ F(s)=\frac{1}{s^2+1} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \rightarrow f(t)=\sin t$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{s^2+4} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$5)\ F(s)=\frac{s}{s^2+6} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\} \rightarrow f(t)=\cos\sqrt{6}t$$

$$6)\ F(s)=\frac{4}{s^2-9} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=\frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-9}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{4}{3}\sinh 3t$$

$$7)\ F(s)=\frac{s}{s^2-16} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16}\right\} \rightarrow f(t)=\cosh 4t$$

$$8)\ F(s)=\frac{2s+1}{s^2+4} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$\rightarrow f(t)=2\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

مثال (۳۶) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید $\left(L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right\}=t^{\alpha}\right)$

$$1)\ F(s)=\frac{1}{\sqrt{s}} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right\} \xrightarrow{\alpha+1=\frac{1}{2}\rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}}$$

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$2)\ F(s)=\frac{4-s}{s\sqrt{s}} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$$

$$f(t)=\frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}}\right\}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}\right\}$$

$$\rightarrow f(t)=\frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f(t)=8\sqrt{\frac{t}{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

مثال (۳۷) لاپلاس معکوس های توابع زیر را بیابید. $\left(L^{-1}\{F(s-a)\}\right)$

$$1)\ F(s)=\frac{1}{(s-1)^2+4} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=\frac{e^t}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{e^t}{2}\sin 2t$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{(s-3)^2} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{3t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \rightarrow f(t)=e^{3t}t$$

$$3)\ F(s)=\frac{1}{(s+4)^8} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^8}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^8}\right\} \xrightarrow{n=7} f(t)=\frac{e^{-4t}}{7!}t^7$$

$$4)\ F(s)=\frac{s}{(s+2)^3} \rightarrow F(s)=\frac{s+2-2}{(s+2)^3}=\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{2}{(s+2)^3} \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} \rightarrow f(t)=e^{-2t}t-e^{-2t}t^2$$

$$5)\ F(s)=\frac{1}{s^2+4s+13} \rightarrow F(s)=\frac{1}{(s+2)^2+9} \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=\frac{e^{-2t}}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{3}\sin 3t$$

$$6)\ F(s)=\frac{s-6}{s^2-4s+13} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s-2-4}{(s-2)^2+9}\right\} \rightarrow$$

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right\}-4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+9}\right\}\ \rightarrow$$

$$f(t)=e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}-\frac{4}{3}e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}\ \rightarrow$$

$$f(t)=e^{2t}\cos 3t-\frac{4}{3}e^{2t}\sin 3t$$

---

7) $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}+e^{-2s}}{s^2+2s+5}\ \rightarrow$

$$F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}=\frac{e^{-t}}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\frac{e^{-t}}{2}\sin 2t$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\sin 2(t-\pi)\right]u_\pi(t)+\left[\frac{1}{2}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2)\right]u_2(t)$$

---

8) $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s-2}}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s-2}}\right\}$

$$f(t)=e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}\xrightarrow{\text{گاما}} f(t)=e^{2t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

---

9) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{\sqrt{2s+1}}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+1}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}t}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{2\pi t}}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{\sqrt{2s+1}}\right\}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(t-2)}}{\sqrt{2\pi(t-2)}}u_2(t)$$

---

10) $F(s)=\dfrac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)} \rightarrow F(s)=\dfrac{2s+4}{(s-2)(s+1)(s+3)}$

$$\rightarrow \frac{2s+4}{(s-2)(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+3} \rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{8}{15} \\ B=\dfrac{-1}{3} \\ C=\dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{8}{15}}{s-2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{5}}{s+3}\right\}$$

$$f(t)=\frac{8}{15}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{5}e^{-3t}$$

---

11) $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2(s^2+4)}$

$$\frac{s-2}{s^2(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=\frac{As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Ds^2}{s^2(s^2+4)}$$

$$=\frac{s^3(A+C)+s^2(B+D)+s(4A)+4B}{s^2(s^2+4)} \rightarrow \begin{cases} A+C=0 \rightarrow C=-\dfrac{1}{4} \\ B+D=0 \rightarrow D=\dfrac{1}{2} \\ 4A=1 \rightarrow A=\dfrac{1}{4} \\ 4B=-2 \rightarrow B=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}}{s^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$$

---

12) $F(s)=\dfrac{1}{s^3+1}$

$$\frac{1}{s^3+1}=\frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-s+1}$$

$$=\frac{As^2-As+A+Bs^2+Cs+Bs+C}{(s^2-s+1)(s+1)} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+C+B=0 \rightarrow \\ A+C=1 \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{3}\quad,\quad B=-\frac{1}{3}\quad,\quad C=\frac{2}{3}$$

$$F(s)=\frac{\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{-1}{3}s+\frac{2}{3}}{s^2-s+1}\ \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{s-2}{\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}\ \rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

مثال (۳۸) مبدل لاپلاس معکوس های زیر را بیابید.

نکته : $L^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t)$

1) $F(s)=\ln\frac{s+2}{s-1}$

$$F(s)=\ln(s+2)-\ln(s-1)\ \rightarrow\ F'(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}\ \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\ \rightarrow\ -tf(t)=e^{-2t}-e^{t}\ \rightarrow\ f(t)=\frac{e^{t}-e^{-2t}}{t}$$

2) $F(s)=\ln\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)\ \rightarrow\ F(s)=\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$

$$F(s)=\ln(s^2-a^2)-2\ln s\ \rightarrow\ F'(s)=\frac{2s}{s^2-a^2}-\frac{2}{s}\ \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F'(s)\}=2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\ \rightarrow\ -tf(t)=2\cosh at-2\ \rightarrow\ f(t)=\frac{2}{t}-\frac{2\cosh at}{t}$$

3) $F(s)=s\ln\sqrt[3]{\frac{s+2}{s-4}}\ \rightarrow\ F(s)=\frac{1}{3}s\ln\frac{s+2}{s-4}$

$$F(s)=\frac{1}{3}s[\ln(s+2)-\ln(s-4)]\ \rightarrow$$

$$F'(s)=\frac{1}{3}\ln(s+2)-\frac{1}{3}\ln(s-4)+\frac{1}{3}\frac{s}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{s}{s-4}$$

$$F''(s)=\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-4}+\frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{(s-4)^2}$$

$$L^{-1}\{F''(s)\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}+\frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}-\frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\}$$

نکته : $L^{-1}\{F''(s)\}=t^2f(t)$

$$t^2f(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{4t}+\frac{2}{3}e^{-2t}t-\frac{4}{3}e^{4t}t \rightarrow f(t)=\frac{e^{-2t}-e^{4t}+2e^{-2t}t-4te^{4t}}{3t^2}$$

4) $F(s)=\operatorname{Arccot}(s)$

$$F'(s)=\frac{-1}{s^2+1} \rightarrow L^{-1}\{F'(s)\}=-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \rightarrow -tf(t)=-\sin t \rightarrow f(t)=\frac{\sin t}{t}$$

5) $F(s)=\tan^{-1}\frac{2}{s-3}$

$$F'(s)=\frac{\frac{-2}{(s-3)^2}}{1+\left(\frac{2}{s-3}\right)^2} \rightarrow F'(s)=\frac{\frac{-2}{(s-3)^2}}{\frac{(s-3)^2+4}{(s-3)^2}} \rightarrow L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-2}{(s-3)^2+4}\right\}$$

$$-tf(t)=-e^{3t}\sin 2t \rightarrow f(t)=\frac{e^{3t}\sin 2t}{t}$$

6) $F(s)=e^{-as}\operatorname{Arctan}(s-1)$

$$F_1(s)=\operatorname{Arctan}(s-1) \rightarrow F_1'(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} \rightarrow -tf_1(t)=e^t\sin t \rightarrow f_1(t)=\frac{e^t\sin t}{-t}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{e^{-as}\operatorname{Arctan}(s-1)\right\} \rightarrow f(t)=\left[\frac{e^{(t-a)}\sin(t-a)}{-(t-a)}\right]u_a(t)$$

7) $F(s)=s\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)$

$$F'(s)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)+s\frac{\frac{-a}{s^2}}{1+\frac{a^2}{s^2}} \rightarrow F'(s)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)-\frac{as}{s^2+a^2}$$

$$G(s)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right) \rightarrow G'(s)=\frac{-a}{s^2+a^2}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{G'(s)\}=-L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} \rightarrow -tg(t)=-\sin at \rightarrow g(t)=\frac{\sin at}{t}$$

حال :

$$\rightarrow L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{s}\right)\right\}-aL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$$

$$-tf(t)=\frac{\sin at}{t}-a\cos at \rightarrow f(t)=\frac{a\cos at}{t}-\frac{\sin at}{t^2}$$

مثال (۳۹) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید. $\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(x)dx\right)$

1) $F(s)=\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$

$$F_1(s)=\tan^{-1}\frac{1}{s}=\cot^{-1}s \rightarrow F_1'(s)=-\frac{1}{s^2+1}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F_1'(s)\}=-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$-tf_1(t)=-\sin t \rightarrow f_1(t)=\frac{\sin t}{t}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} \rightarrow f(t)=\int_0^t \frac{\sin x}{x}dx$$

2) $F(s)=\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+1}$

$$F_1(s)=\ln\frac{s+3}{s+1} \rightarrow F_1(s)=\ln(s+3)-\ln(s+1) \rightarrow F_1'(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+1}$$

$$L^{-1}\{F_1'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \rightarrow -tf_1(t)=e^{-3t}-e^{-t} \rightarrow f_1(t)=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+1}\right\} \rightarrow f(t)=\int_0^t \frac{e^{-x}-e^{-3x}}{x}dx$$

3) $F(s)=\frac{1}{s-1}\ln\frac{s+1}{s-1} \rightarrow \frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s-1+2}{s-1}\right)$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s-1+2}{s-1}\right)\right\} \rightarrow f(t)=e^{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\frac{s+2}{s}\right\}$$

$$F_1(s)=\ln\frac{s+2}{s}=\ln(s+2)-\ln(s) \rightarrow F_1'(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s} \rightarrow$$

$$L^{-1}\{F_1'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \rightarrow -tf_1(t)=e^{-2t}-1$$

$$f_1(t)=\frac{1-e^{-2t}}{t} \rightarrow f(t)=e^{t}\int_0^t\frac{1-e^{-2x}}{x}dx$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{s-4}\cot^{-1}(s+2)$$

$$F(s)=\frac{1}{s-4}\cot^{-1}(s-4+6)$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\cot^{-1}(s-4+6)\right\} \rightarrow f(t)=e^{4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cot^{-1}(s+6)\right\}$$

$$F_1(s)=\cot^{-1}(s+6) \rightarrow F_1'(s)=\frac{-1}{(s+6)^2+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow L^{-1}\{F_1'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+6)^2+1}\right\} \rightarrow -tf_1(t)=-e^{-6t}\sin t \rightarrow f_1(t)=\frac{e^{-6t}\sin t}{t}$$

پس :

$$f(t)=e^{4t}\int_0^t\frac{e^{-6x}\sin x}{x}dx$$

$$5)\ F(s)=\frac{1}{s\sqrt{s+4}}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{s+4}}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+4}}\right\}=e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}=e^{-4t}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{e^{-4t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{s+4}}\right\} \rightarrow f(t)=\int_0^t\frac{e^{-4x}}{\sqrt{\pi x}}dx$$

$$\xrightarrow[x=u^2\rightarrow dx=2u\,du]{\sqrt{x}=u} f(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\frac{e^{-4u^2}}{\sqrt{\pi}\,u}2u\,du \rightarrow f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-4u^2}du$$

مثال (۴۰) مبدل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$\left(L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(p)dp\right\}=\frac{f(t)}{t}\right)$$

1) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2-4)^2}$

$$L^{-1}\left\{\int_s^{\infty}\frac{p}{(p^2-4)^2}dp\right\}=\frac{f(t)}{t} \rightarrow L^{-1}\left\{\frac{-1}{2(p^2-4)}\bigg|_s^{\infty}\right\}=\frac{f(t)}{t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2-4)}\right\}=\frac{f(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{4}\sinh 2t=\frac{f(t)}{t} \rightarrow f(t)=\frac{t}{4}\sinh 2t$$

2) $F(s)=\dfrac{s}{s^4+8s^2+16} \rightarrow F(s)=\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$

$$L^{-1}\left\{\int_s^{\infty}\frac{p}{(p^2+4)^2}dp\right\}=\frac{f(t)}{t} \rightarrow L^{-1}\left\{\frac{-1}{2(p^2+4)}\bigg|_s^{\infty}\right\}=\frac{f(t)}{t} \rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{2(p^2+4)}\right\}=\frac{f(t)}{t}$$

$$\rightarrow f(t)=\frac{t}{4}\sin 2t$$

3) $\displaystyle\int_s^{\infty}\frac{pe^{-p}}{p^2+2p+5}dp$

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+2p+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{p+1-1}{(p+1)^2+4}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2+4}\right\}=e^{-t}\cos 2t-\frac{e^{-t}}{2}\sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{pe^{-p}}{p^2-2p+5}\right\}=\left[e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right]u_1(t)$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\int_s^{\infty}\frac{pe^{-p}}{p^2+2p+5}dp\right\}$$

$$\rightarrow f(t)=\frac{\left[e^{-(t-1)}\cos 2(t-1)-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)\right]u_1(t)}{t}$$

مثال (۴۱) ثابت کنید : $\int_s^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-x}$

$$f(x)=\int_s^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt \rightarrow L\{f(x)\}=L\left\{\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt\right\}=$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt\right)dx=\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}\left(\int_0^\infty e^{-sx}\cos xt\,dx\right)$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty \frac{L\{\cos xt\}}{1+t^2}dt$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty \frac{s}{(1+t^2)(s^2+t^2)}dt \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}}$$

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty\left(\frac{\frac{s}{s^2-1}}{1+t^2}-\frac{\frac{s}{s^2-1}}{s^2+t^2}\right)dt=\frac{s}{s^2-1}\left(\tan^{-1}t-\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{t}{s}\right)\Big|_0^\infty$$

$$L\{f(x)\}=\frac{s}{s^2-1}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2s}-0+0\right] \rightarrow L\{f(x)\}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{s}{s^2-1}-\frac{1}{s^2-1}\right]$$

$$L\{f(x)\}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)(s+1)}\right] \rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x} \xrightarrow{\text{پس}} \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

تجزیه کسر بالا :

$$\frac{s}{(1+t^2)(s^2+t^2)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{s^2+t^2}$$

$$=\frac{Ats^2+At^3+Bs^2+Bt^2+Ct+D+Ct^3+Dt^2}{(1+t^2)(s^2+t^2)} \rightarrow \begin{cases} B=\frac{s}{s^2-1} \\ A=C=0 \\ D=\frac{-s}{s^2-1}\end{cases}$$

۵-۹-۱- تمرین :

(۱) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

1) $F(s)=\frac{s^2+1}{s^6}$ 2) $F(s)=\frac{s}{(s-1)^4}$

3) $F(s)=\frac{3s+1}{(s-1)^3}$ 4) $F(s)=\frac{2s+3s^2+4s^4}{s^7}$

$$5)\ F(s)=\frac{3s+2}{s^2+3}$$

$$6)\ F(s)=\frac{3-s^2}{s^{\frac{3}{2}}}$$

$$7)\ F(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$8)\ F(s)=\frac{se^{-\pi s}}{s^2+2s+3}$$

$$9)\ F(s)=\frac{s^2}{s^4-1}$$

$$10)\ F(s)=\frac{e^{-2s}}{s^3(s^2+1)}$$

$$11)\ F(s)=\frac{(s+1)e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}s}}{s^2+s+1}$$

$$12)\ F(s)=\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s^2+4s+5}$$

(۲) لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ F(s)=\frac{e^{-s}}{\sqrt{3s+2}}$$

$$2)\ F(s)=\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$3)\ F(s)=\left(\frac{s^3-3s^2+9s-3}{(s^2+1)(s^2+9)}\right)e^{-2\pi s}$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{s^4+1}$$

$$5)\ F(s)=\frac{1}{s+1}\cot^{-1}(s+1)+\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$$

$$6)\ F(s)=\ln\frac{s}{s-1}+\ln\sqrt[3]{\frac{s+1}{s-2}}$$

$$7)\ F(s)=\frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\ln\sqrt[6]{\frac{s}{s^2+1}}$$

$$8)\ F(s)=\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+s}\right)$$

$$9)\ F(s)=\frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s-1}$$

$$10)\ F(s)=\frac{1}{s+1}\ln\frac{s}{s-1}$$

$$11)\ F(s)=\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$$

$$12)\ F(s)=s\cot^{-1}s$$

$$13)\ F(s)=\int_s^\infty\frac{e^{-u}}{u^2+4u+5}du$$

$$14)\ F(s)=\frac{s}{(s^2-9)^2}$$

$$15)\ F(s)=\frac{1}{s^2}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

$$16)\ F(s)=\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$$

$$17)\ F(s)=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+3}}{s-1}$$

$$18)\ F(s)=\ln\left(\frac{s^2+2s+3}{s^2+1}\right)+\frac{e^{-s}}{(s^2+4s+6)^2}$$

(۳) نشان دهید.

$$\int_s^\infty\frac{\sin tx}{x(1+x^2)}dt=\frac{\pi}{2}(1-e^{-x})$$

۵-۱۰- تبدیل لاپلاس مشتق :

اگر $f(t)$ روی $[0,\infty)$ تابعی پیوسته و $f'(t)$ قطعه ای پیوسته باشد داریم :

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$$

$$L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$$

$$\vdots$$

$$L\{f^{(n)}(t)\}=s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-1}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

مثال (۴۲) اگر $L\{\sin\sqrt{t}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$ باشد مقدار $L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ را بیابید.

$$\begin{cases} f(t)=\sin\sqrt{t} \rightarrow f'(t)=\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \rightarrow L\{f'(t)\}=\frac{1}{2}L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$sL\{f(t)\}-(f(0))=\frac{1}{2}L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} \rightarrow L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=2sL\{f(t)\}$$

$$L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=2s\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{4s}} \rightarrow L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$$

مثال (۴۳) تبدیل لاپلاس $\cos^2 x$ را بیابید.

$$\begin{cases} f(x)=\cos^2 x \rightarrow f'(x)=-2\sin x\cos x \rightarrow f'(x)=-2\sin 2x \\ f(0)=1 \end{cases}$$

$$L\{f'(x)\}=-L\{\sin 2x\} \rightarrow sL\{f(x)\}-f(0)=-\frac{2}{s^2+4}$$

$$L\{f(x)\}=-\frac{2}{s}\frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{s} \rightarrow L\{f(x)\}=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

مثال (۴۴) تبدیل لاپلاس $f(x)=\cos^3 x$ را بیابید.

$$\begin{cases} f(x)=\cos^3 x \rightarrow f'(x)=-3\sin x\cos^2 x \rightarrow f''(x)=6\sin^2 x\cos x-3\cos^3 x \\ f(0)=1 \quad , \quad f'(0)=0 \end{cases}$$

$$f''(x)=6(1-\cos^2 x)\cos x-3\cos^3 x \to f''(x)=6\cos x-9\cos^3 x$$

$$\to \quad f''(x)=6\cos x-9f(x)$$

$$L\{f''(x)\}=6L\{\cos x\}-9L\{f(x)\}$$

$$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)=6\frac{s}{s^2+1}-9L\{f(t)\} \xrightarrow[f'(0)=0]{f(0)=1}$$

$$L\{f(t)\}(s^2+9)=\frac{6s}{s^2+1}+s \to L\{f(t)\}=\frac{6s}{(s^2+1)(s^2+9)}+\frac{s}{s^2+9}$$

۵-۱۱- حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس :

برای حل معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه، با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم، تا معادله ای معمولی برحسب $L\{y\}$ بدست آید، آن را حل می کنیم و در انتها از حاصل ،لاپلاس معکوس می گیریم تا تابع مجهول $y(t)$ حاصل شود.

$$L\{y'\}=sL\{y\}-y(0)$$

$$L\{y''\}=s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)$$

مثال (۴۵) معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

1) $y''+y'-2y=0 \qquad y(0)=4 \quad , \quad y'(0)=1$

$$L\{y''\}+L\{y'\}-2L\{y\}=L\{0\} \to$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+sL\{y\}-y(0)-2L\{y\}=0$$

$$s^2L\{y\}-4s-1+sL\{y\}-2L\{y\}=0 \to L\{y\}=\frac{4s+5}{s^2+s-2}$$

$$L\{y\}=\frac{4s+5}{(s-1)(s+2)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} L\{y\}=\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s+2}$$

$$L^{-1}\{y\}=L^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \to y(t)=3e^t+e^{-2t}$$

2) $y''+2y'+2y=\delta(t-\pi) \qquad y(0)=y'(0)=1$

$$L\{y''\}+2L\{y'\}+2L\{y\}=L\{\delta(t-\pi)\} \to$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+2(sL\{y\}-y(0))+2L\{y\}=e^{-\pi s}$$

$$\xrightarrow[y'(0)=1]{y(0)=1} L\{y\}(s^2+2s+2)-s-3=e^{-\pi s} \to L\{y\}=\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}+\frac{s+3}{(s+1)^2+1}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$y(t)=e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)u_\pi(t)+e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t$$

3) $y''-3y'-4y=\begin{cases}e^x & 0\le x<2\\ 0 & x\ge 2\end{cases}\qquad y(0)=y'(0)=0$

$$y''-3y'-4y=e^x+(0-e^x)u_2(x)=e^x-e^{x-2+2}u_2(x)$$

$$L\{y''\}-3L\{y'\}-4L\{y\}=L\{e^x\}-e^2L\{u_2(x)e^{x-2}\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-3(sL\{y\}-y(0))-4L\{y\}=\frac{1}{s-1}-e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}$$

$$L\{y\}(s^2-3s-4)=\frac{1}{s-1}-\frac{e^2e^{-2s}}{s-1}\ \rightarrow\ L\{y\}=\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-4)}-\frac{e^2e^{-2s}}{(s-1)(s+1)(s-4)}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-4}\begin{cases}A=-\frac{1}{6}\\ B=\frac{1}{10}\\ C=\frac{1}{15}\end{cases}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{6}}{s-1}+\frac{\frac{1}{10}}{s+1}+\frac{\frac{1}{15}}{s-4}\right\}-e^2L^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{-\frac{1}{6}}{s-1}+\frac{\frac{1}{10}}{s+1}+\frac{\frac{1}{15}}{s-4}\right)\right\}$$

$$y(t)=-\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{10}e^{-x}+\frac{1}{15}e^{4x}-e^2\left[-\frac{1}{6}e^{(x-2)}+\frac{1}{10}e^{-(x-2)}+\frac{1}{15}e^{4(x-2)}\right]u_2(x)$$

4) $y''+4y=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}\qquad y(0)=0\quad,\quad y'(0)=1$

$$y''+4y=x+(1-x)u_1(x)$$

$$L\{y''\}+4L\{y\}=L\{x\}-L\{u_1(x)(x-1)\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+4L\{y\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$L\{y\}(s^2+4)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+1\ \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2(s^2+4)}-\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+4)}+\frac{1}{s^2+4}$$

$$y=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{s^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{\frac{1}{4}}{s^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{s^2+4}\right)\right\}+\frac{1}{s^2+4}$$

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x-\left[\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{8}\sin 2(x-1)\right]u_1(x)+\frac{1}{2}\sin 2x$$

تجزیه کسر :

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=\frac{As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Ds^2}{s^2(s^2+4)}$$

$$\begin{cases}A+C=0 \;\rightarrow\; C=0\\ B+D=0 \;\rightarrow\; D=-\frac{1}{4}\\ 4A=0\\ 4B=1 \;\rightarrow\; B=\frac{1}{4}\end{cases}$$

---

5) $y''+2y'+y=\begin{cases}0 & 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ \sin t & t\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad y(0)=y'(0)=0$

$$y''+2y'+y=0+(\sin t)u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

نکته : $\sin\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}$

$$L\{y''\}+2L\{y'\}+L\{y\}=L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+2(sL\{y\}-y(0))+L\{y\}=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}(s^2+2s+1)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}\;\rightarrow\;L\{y\}=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}\;\rightarrow\;y(t)=L^{-1}\left\{\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2}+\frac{+\frac{1}{2}}{(s^2+1)}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}$$

$$y(t)=\left[-\frac{1}{2}e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

تجزیه کسر :

$$\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)}\qquad \begin{cases}A=C=0\\ B=\dfrac{-1}{2}\\ D=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

6) $y'+y=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ -1 & x\ge 1\end{cases}\qquad y(0)=0$

$$y'+y=1-2u_1(x)$$

$$L\{y'\}+L\{y\}=L\{1\}-2L\{u_1(x)\}$$

$$sL\{y\}-y(0)+L\{y\}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-s}\ \rightarrow\ L\{y\}=\frac{1}{s(s+1)}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}\ \rightarrow$$

با تجزیه کسر داریم :

$$y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}-2L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-s}\right\}\ \rightarrow\ y=1-e^{-x}-2\left(1-e^{-(x-1)}\right)u_1(x)$$

7) $y''-4y'+4y=3x^5e^{2x}\qquad y(0)=y'(0)=0$

$$L\{y''\}-4L\{y'\}+4L\{y\}=3L\{x^5e^{2x}\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-4(sL\{y\}-y(0))+4L\{y\}=3\frac{5!}{(s-2)^6}$$

$$L\{y\}(s^2-4s+4)=3\frac{5!}{(s-2)^6}\ \rightarrow\ L\{y\}=3\frac{5!}{(s-2)^8}$$

$$y(x)=\frac{3\times 5!}{7!}L^{-1}\left\{\frac{7!}{(s-2)^{7+1}}\right\}\ \rightarrow\ y(x)=\frac{e^{2x}}{14}x^7$$

8) $ty''+(3t-1)y'-(4t+9)y=0\qquad y(0)=0$

$$L\{ty''\}+3L\{ty'\}-L\{y'\}-4L\{ty\}-9L\{y\}=L\{0\}$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)\right]-3\frac{d}{ds}\left[sL\{y\}-y(0)\right]-(sL\{y\}-y(0))+4\frac{d}{ds}L\{y\}-9L\{y\}=0$$

$$-2sL\{y\}-\frac{dL\{y\}}{ds}s^2-3L\{y\}-3s\frac{dL\{y\}}{ds}-sL\{y\}+4\frac{d}{ds}L\{y\}-9L\{y\}=0$$

$$\frac{dL\{y\}}{ds}\left(-s^2-3s+4\right)-(3s+12)L\{y\}=0$$ معادله جدایی پذیر :

$$-\frac{dL\{y\}}{ds}(s-1)(s+4)=3(s+4)L\{y\}$$

$$\frac{dL\{y\}}{L\{y\}}=\frac{-3}{(s-1)}ds \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(L\{y\})=-3\ln(s-1)+\ln c$$

$$\rightarrow \ln(L\{y\})=\ln\frac{c}{(s-1)^3} \rightarrow L\{y\}=\frac{c}{(s-1)^3}$$

$$y=cL^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} \rightarrow y=\frac{c}{2}t^2e^t$$

---

9) $ty''+(2t+3)y'+(t+3)y=3e^{-t} \qquad y(0)=0$

$$L\{ty''\}+2L\{ty'\}+3L\{y'\}+L\{ty\}+3L\{y\}=3L\{e^{-t}\}$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)\right]-2\frac{d}{ds}\left[sL\{y\}-y(0)\right]+3(sL\{y\}-y(0))-\frac{d}{ds}L\{y\}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$-2sL\{y\}-s^2\frac{dL\{y\}}{ds}-2L\{y\}-2s\frac{dL\{y\}}{ds}+3sL\{y\}-\frac{dL\{y\}}{ds}+3L\{y\}=\frac{3}{s+1}$$

$$-\frac{dL\{y\}}{ds}\left(s^2+2s+1\right)+L\{y\}(s+1)=\frac{3}{s+1} \xrightarrow{\div -(s+1)^2} \frac{dL\{y\}}{ds}-\frac{1}{(s+1)}L\{y\}=\frac{-3}{(s+1)^3}$$

معادله خطی مرتبه اول : وابسته $L\{y\}$ ، مستقل s

$$L\{y\}=e^{\int\frac{1}{s+1}ds}\left(\int\frac{-3}{(s+1)^3}e^{-\int\frac{1}{s+1}ds}ds+c\right)$$

نکته : $e^{\ln(s+1)}=(s+1)$

$$L\{y\}=(s+1)\left(\int-\frac{3}{(s+1)^4}ds+c\right) \rightarrow L\{y\}=(s+1)\left(\frac{1}{(s+1)^3}+c\right)$$

نکته : قضیه مقدار اولیه $\qquad f(0)=\lim_{s\to+\infty}F(s)$

پس : $\qquad 0=0+\infty(c) \rightarrow c=0$

$$L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \rightarrow y=e^{-t}t$$

---

10) $ty''+y'+ty=0 \qquad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=0$

$$L\{ty''\}+L\{y'\}+L\{ty\}=0$$

نکته : برای راحتی کار می توانیم $L\{y\}=Y$ و به جای $\frac{d}{ds}$ از علامت پرین استفاده کنیم.

$$-\left(s^2Y-sy(0)-y'(0)\right)'+\left(sY-y(0)\right)-(Y)'=L\{0\}$$

$$-2sY-s^2Y'+sY-Y'=0$$

$$-Y'\left(s^2+1\right)=sY \;\rightarrow\; \frac{Y'}{Y}=\frac{-s}{s^2+1} \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$\ln|Y|=-\frac{1}{2}\ln\left|s^2+1\right|+\ln c \;\rightarrow\; \ln|Y|=\ln\left|\frac{c}{\sqrt{s^2+1}}\right|$$

$$Y=\frac{c}{\sqrt{s^2+1}} \;\rightarrow\; L^{-1}\{Y\}=cL^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} \;\rightarrow\; y(t)=cJ_0(t)$$

نکته : $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\}=J_0(t)$

۵-۱۱-۱- تمرین :

(۱) معادلات دیفرانسیل با مقادیر اولیه زیر را با کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

1) $y'+y=-\int_0^x y(t)dt+2u_1(x)-u_2(x) \qquad y(0)=0$

2) $y''+2y'+2y=\begin{cases}\sin t & 0\le t<\pi\\ 0 & t\ge\pi\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$

3) $y''+y=\begin{cases}2 & 0\le t<3\\ 3t-7 & t\ge 3\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$

4) $y''+2y'+y=\begin{cases}0 & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \cos 2x & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$

5) $y''+4y=\begin{cases}1 & \pi\le t<2\pi\\ 0 & 0\le t<\pi,\ 2\pi\le t\end{cases} \qquad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=0$

6) $y''+y=\begin{cases} x & 0\le x<4 \\ 3 & x\ge 4 \end{cases}$ $\quad y(0)=y'(0)=0$

7) $ty''-4ty'-4y=0$ $\quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$

8) $(t+2)y''+(t+1)y'-y=0$ $\quad y(0)=y'(0)=0$

9) $y''+2y'+y=te^{t}$ $\quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$

10) $ty''-(t-1)y'+y=2-2e^{t}$ $\quad y(0)=3 \quad , \quad y'(0)=-3$

11) $ty''-(t+2)y'+3y=t-1$ $\quad y(0)=y'(0)=0$

(۲) اگر $L\{\sin\sqrt{t}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$ باشد، معادله $4ty''+2y'+y=0$ $(y(0)=0)$ را حل کنید.

(۳) معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک لاپلاس حل کنید.

1) $ty''+2(2t-1)y'+4(t-1)y=t\,e^{-2t}$ $\quad y(0)=0$

2) $y'+3y=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 2-t & 1\le t<2 \end{cases}$ $\quad f(t+2)=f(t)$ $\quad y(0)=1$

۵-۱۲- پیچش (تلفیق یا کانولوشن) :

کانولوش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را بصورت $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx$ تعریف می کنند.

خواص کانولوشن :

1) $f*g=g*f$

2) $g*(f+h)=g*f+g*h$

3) $f*(g*h)=(f*g)*h$

4) $f*0=0*f=0$

تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع : اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ و $L\{g(t)\}=G(s)$ موجود باشند آنگاه :

$$L(f*g)=L\left\{\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right\}=L\{f(t)\}L\{g(t)\}=F(s)G(s)$$

اثبات :

$$L\{(f*g)_t\}=\int_0^\infty e^{-st}(f*g)_t\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t(f-x)\,g(x)dx\,dt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(t-x)g(x)dx\,dt\overset{*}{=}\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-st}f(t-x)g(x)dx\,dt$$

* تغییر ترتیب

$$\xrightarrow{t-x=u} =\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+x)} f(u)g(x)du\,dx$$

$$=\left(\int_0^{\infty} e^{-su}f(u)du\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-sx}\, g(x)dx\right)=F(s)G(s)$$

مثال (۴۶) لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=e^{-t}\int_0^t xe^{x}dx \xrightarrow{\text{کانولوشن}} L\{f(t)\}=L\left\{e^{-t}\int_0^t xe^{-(t-x)}dx\right\}$$

$$F(s)=L\left\{t*e^{-t}\right\} \rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+1}$$

$$2)\ f(t)=\int_0^t \sin x(t-x)^3dx \rightarrow L\{f(t)\}=L\left\{\int_0^t \sin x(t-x)^3dx\right\}$$

$$F(s)=L\left\{\sin t*t^3\right\} \rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2+1}\left(\frac{3!}{s^4}\right)=\frac{6}{s^4(s^2+1)}$$

نتیجه مهم کانولوشن :

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=(f*g)(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

فرمول فوق روشی مهم و سریع برای محاسبه لاپلاس معکوس است.

مثال (۴۷) لاپلاس معکوس های توابع زیر را به روش کانولوشن محاسبه کنید.

$$1)\ F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\right\} \rightarrow f(t)=\cos t*\sin t$$

$$f(t)=\int_0^t \cos(t-x)\sin x\,dx \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin t+\sin(t-2x)]dx$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[(\sin t)x\Big|_0^t+\frac{1}{2}\cos(t-2x)\Big|_0^t\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[t\sin t+\frac{1}{2}(\cos t-\cos t)\right] \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}t\sin t$$

$$2)\ F(s)=\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2} \rightarrow F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}\right\} \rightarrow f(t)=\cos at*\cos at$$

$$f(t)=\int_0^t \cos a(t-x)\cos ax\,dx=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos at+\cos(at-2ax)]dx$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[(\cos at)x\Big|_0^t-\frac{1}{2a}\sin(at-2ax)\Big|_0^t\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[t\cos at-\frac{1}{2a}(\sin(-at)-\sin at)\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{2}t\cos at+\frac{1}{2a}\sin at$$

---

3) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^3(s^2+1)}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=\left(\frac{1}{2!}t^2*\sin t\right)=\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-x)x^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\cos(t-x)+2x\sin(t-x)-2\cos(t-x)\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}\left[t^2+-2-(0+0-2\cos t)\right]=\frac{1}{2}t^2-1+\cos t$$

حال : $L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{e^{-s}\left(\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right)\right\}$

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}(t-1)^2-1+\cos(t-1)\right]u_1(t)$$

---

4) $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$

نکته : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t\ \rightarrow\ f(t)=\int_0^t e^{t-x}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}dx\ \xrightarrow[x=u^2]{\sqrt{x}=u}\ f(t)=\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$$

---

5) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}\ln\dfrac{s^2+4}{s^2}\ \rightarrow\ F(s)=F_1(s)\cdot F_2(s)$

$$F_1(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}\ \rightarrow\ L^{-1}\{F_1(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}\ \rightarrow\ f_1(t)=e^{-t}\sin t$$

$$F_2(s)=\ln\frac{s^2+4}{s^2} \rightarrow F_2'(s)=\frac{2s}{s^2+4}-\frac{2}{s} \rightarrow f_2(t)=\frac{2-2\cos 2t}{t}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{F_1(s)\cdot F_2(s)\} \rightarrow f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

$$f(t)=\int_0^t e^{-(t-x)}\sin(t-x)\left(\frac{2-2\cos 2x}{x}\right)dx$$

$$6)\ F(s)=\frac{1}{(s^2+4s+13)^2} \rightarrow F(s)=\frac{1}{[(s+2)^2+9]^2}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+2)^2+9]^2}\right\}$$

$$f(t)=e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s^2+9}\right\} \rightarrow f(t)=\frac{e^{-2t}}{9}(\sin 3t*\sin 3t)$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{9}\int_0^t \sin 3(t-x)\sin 3x\,dx=\frac{e^{-2t}}{-18}\int_0^t[\cos 3t-\cos(3t-6x)]\,dx$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{-18}\left[(\cos 3t)x\Big|_0^t+\frac{1}{6}\sin(3t-6x)\Big|_0^t\right]$$

$$f(t)=\frac{e^{-2t}}{-18}\left[t\cos 3t+\frac{1}{6}[\sin(-3t)-\sin 3t]\right] \xrightarrow{-\sin\theta=\sin(-\theta)} f(t)=\frac{e^{-2t}}{-18}\left[t\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t\right]$$

۵-۱۲- تمرین : لاپلاس معکوس های توابع زیر را بیابید.

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s^4(s^2+4)}$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(s+3)}$$

$$3)\ F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$4)\ F(s)=\frac{1}{(s^2+4)^2}$$

$$5)\ F(s)=\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)$$

$$6)\ F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}\cot^{-1}(s+3)$$

$$7)\ F(s)=\frac{s}{s^2+1}\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$$

$$8)\ F(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$$

$$9)\ F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\cot^{-1}s$$

$$10)\ F(s)=\frac{1}{(s^2+2s+10)^2}$$

۵-۱۳- معادلات انتگرالی :

معادلات انتگرالی که مشتق تابع مجهول نیز در معادله وجود داشته باشد، معادلات دیفرانسیل انتگرالی نامیده می شود.

برای حل معادلات انتگرالی از فرمول کانولوشن استفاده می کنیم.

$$\left(L\left\{\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right\}=F(s)G(s)\right)$$

مثال (۴۸) معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

1) $y(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-\lambda)y(\lambda)d\lambda$

$$L\{y(t)\}=L\{t^2\}+L\left\{\int_0^t \sin(t-\lambda)y(\lambda)d\lambda\right\}$$

$$L\{y\}=\frac{2!}{s^3}+L\{\sin t*y\} \rightarrow L\{y\}=\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2+1}L\{y\}$$

$$L\{y\}\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{2}{s^3} \rightarrow L\{y\}\left(\frac{s^2+1-1}{s^2+1}\right)=\frac{2}{s^3}$$

$$L\{y\}=\frac{2(s^2+1)}{s^5} \rightarrow L\{y\}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5} \rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s^5}\right\} \rightarrow y(t)=t^2+\frac{t^4}{12}$$

2) $y''(t)=-t+\int_0^t (t-x)y(x)dx \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$

$$L\{y''(t)\}=-L\{t\}+L\left\{\int_0^t (t-x)y(x)dx\right\} \rightarrow s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)=-\frac{1}{s^2}+L\{t*y\}$$

$$s^2L\{y\}-1=-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}L\{y\} \rightarrow L\{y\}\left(s^2-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{-1}{s^2}+1 \rightarrow L\{y\}\left(\frac{s^4-1}{s^2}\right)=\frac{s^2-1}{s^2}$$

$$L\{y\}=\frac{s^2-1}{s^4-1} \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{s^2+1} \rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \rightarrow y(t)=\sin t$$

3) $y''+y'=\cos t+\int_0^t \sin(t-x)y'(x)dx \qquad y(0)=y'(0)=0$

$$L\{y''\}+L\{y'\}=L\{\cos t\}+L\{\sin t*y'(t)\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+sL\{y\}-y(0)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}(sL\{y\}-y(0))$$

$$L\{y\}\left(s^2+s-\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}\left(\frac{s^4+s^3+s^2+s-s}{s^2+1}\right)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s(s^2+s+1)} \rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+s+1)}\right\}$$

$$\rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}\right\} \xrightarrow[C=-1]{A=1,B=-1} y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\}$$

$$\rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$y=1-L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$y=1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

4) $e^x y(x)=x+\int_0^x e^t\, y(t)\sin(x-t)\,dt$

$$\xrightarrow{+e^x} y(x)=e^{-x}x+\int_0^x e^{t-x}\, y(t)\sin(x-t)\,dt$$

$$L\{y(x)\}=L\{e^{-x}x\}+L\left\{\int_0^x e^{-(x-t)}\, y(t)\sin(x-t)\,dt\right\}$$

$$L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2}+L\{e^{-x}\sin x * y(x)\} \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^2+1}\cdot L\{y\}$$

$$L\{y\}\left(1-\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)=\frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow L\{y\}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^4}$$

$$y=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\} \rightarrow y(x)=e^{-x}x+\frac{1}{6}e^{-x}x^3$$

$$5)\ y'=\sin x+\cos x\int_0^x y(t)\cos t\,dt+\sin x\int_0^x y(t)\sin t\,dt \qquad y(0)=0$$

$$y'=\sin x+\int_0^x y(t)\cos x\cos t\,dt+\int_0^x y(t)\sin x\sin t\,dt$$

تبدیل به حاصل جمع :

$$y'=\sin x+\frac{1}{2}\int_0^x y(t)[\cos(x+t)+\cos(x-t)]dt-\frac{1}{2}\int_0^x y(t)[\cos(x+t)-\cos(x-t)]dt$$

$$y'=\sin x+\frac{1}{2}\int_0^x y(t)[\cos(x+t)+\cos(x-t)-\cos(x+t)+\cos(x-t)]dt$$

$$y'=\sin x+\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt \rightarrow L\{y'\}=L\{\sin x\}+L\left\{\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt\right\}$$

$$sL\{y\}-y(0)=\frac{1}{s^2+1}+L\{y(t)*\cos t\} \rightarrow sL\{y\}=\frac{1}{s^2+1}+L\{y\}\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{y\}\left(s-\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{1}{s^2+1} \rightarrow L\{y\}\left(\frac{s^3+s-s}{s^2+1}\right)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s^3} \rightarrow y(x)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \rightarrow y(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$6)\ \int_0^t \frac{y(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\,d\lambda=1+t+t^2$$

نکته : $L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$L\left\{\int_0^t \frac{y(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\,d\lambda\right\}=L\{1\}+L\{t\}+L\{t^2\} \rightarrow L\left\{y*\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}$$

$$L\{y\}\sqrt{\frac{\pi}{s}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3} \rightarrow y(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}+\frac{1}{s\sqrt{s}}+\frac{2}{s^2\sqrt{s}}\right\}$$

$$\begin{cases} L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}=\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}L^{-1}\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}=\dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}} \\ L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^{\frac{5}{2}}}\right\}=2\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}L^{-1}\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}\right\}=\dfrac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}+2\sqrt{t}+\frac{8}{3}t\sqrt{t}\right]$$

۵-۱۳-۱- تمرین : معادلات انتگرالی زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

1) $y'(t)=e^t-\int_0^t y(x)\,dx \quad , \quad y(0)=1$

2) $y(t)=e^{-t}-2\int_0^t \cos(t-u)y(u)\,du$

3) $y'=e^x+\cos x\int_0^x y(t)\cos t\ dt+\sin x\int_0^x y(t)\sin t\ dt \quad , \quad y(0)=0$

4) $y''(t)=\sin t\int_0^t \cos x\cosh x\ dx-\cos t\int_0^t \sin x\cosh x\ dx \quad , \quad y(0)=y'(0)=0$

5) $\int_0^t \dfrac{y(x)}{(t-x)^{\frac{1}{3}}}\ dx=t(t+1)$

6) $e^t y(t)=t+\int_0^t e^x y'(x)\cos(t-x)\,dx \quad , \quad y(0)=0$

7) $y(t)=2+\int_0^t e^{t-x}y'(x)\ dx \quad , \quad y(0)=2$

8) $y'(t)+\int_0^t y(x)\cos(t-x)dx=\cos t \quad , \quad y(0)=0$

فصل ۶ : دستگاه های معادلا دیفرانسیل

۶-۱- مقدمه :

به ازای متغیر مستقل t و متغیرهای وابسته $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و $\cdots$ و $x_n(t)$ و مشتقات آنها دستگاه زیر را دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می نامیم.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,\, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,\, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,\, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+f_1(x) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+f_2(x) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+f_n(x) \end{cases}$$

نکته : اگر همه توابع $a_{ij}(t)$ ثابت باشند، دستگاه را دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت می گوییم.

نکته : اگر برای هر i ، $f_i(t)=0$ باشد، دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی با ضرایب ثابت همگن می نامیم.

نکته : در برخی دستگاه ها به جای استفاده از متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 و $\cdots$ از متغیرهای x و y و z و $\cdots$ استفاده می کنند.

نکته : روش کرامر برای حل دستگاه $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

۶-۲- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش حذفی :

در این روش با حذف برخی از توابع مجهول بین معادلات، یک معادله دیفرانسیل برحسب یکی از توابع مجهول بدست آورده با حل آن سایر مجهولات را مشخص می کنیم.

مثال (۱) جواب دستگاه معادلات $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y = y + x \end{cases}$ را بیابید.

از معادله اول y و y' را محاسبه کرده و در معادله دوم جایگذاری می کنیم.

$$x' = 4x - 2y \;\rightarrow\; y = 2x - \frac{x'}{2} \;\rightarrow\; y' = 2x' - \frac{x''}{2}$$

جایگذاری در معادله دوم $\rightarrow\; 2x' - \frac{x''}{2} = 2x - \frac{x'}{2} + x \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x'' - 5x' + 6x = 0 \;\rightarrow$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 2 \end{cases} \;\rightarrow\; x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

حال x را داریم و x' را می سازیم و در معادله اول جایگذاری می کنیم.

$$x' = 3c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t}$$

از معادله اول داریم $y = 2x - \frac{1}{2}x' \;\rightarrow\; y = 2c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} - \frac{3}{2}c_1 e^{3t} - c_2 e^{2t}$

$$y(t) = \frac{1}{2}c_1 e^{3t} - \frac{3}{2}c_2 e^{3t}$$

مثال (۲) دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + 1 & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y + e^{2t} & (2) \end{cases}$$

از معادله اول y و y' را محاسبه کرده و در معادله دوم جایگذاری می کنیم.

$$x' = -3x + 4y + 1 \rightarrow y = \frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \rightarrow y' = \frac{1}{4}x'' + \frac{3}{4}x'$$

جایگذاری در معادله دوم $\rightarrow \frac{1}{4}x'' + \frac{3}{4}x' = -2x + 3\left(\frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) + e^{2t}$

$$\rightarrow x'' - x = -3 + 4e^{2t}$$

حال این یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ ناهمگن با ضرایب ثابت است که هم با روش ضرایب نامعین و هم با روش تغییر پارامتر قابل حل است.

$$x'' - x = 0 \rightarrow m^2 - 1 = 0 \rightarrow m = \pm 1 \rightarrow x_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$x_p = A + Be^{2t} \rightarrow x_p' = 2Be^{2t} \rightarrow x_p'' = 4Be^{2t}$$

جایگذاری در معادله ناهمگن $4Be^{2t} - A - Be^{2t} = -3 + 4e^{2t} \rightarrow$

$$3Be^{2t} - A = -3 + 4e^{2t} \rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

پس $x_p(t) = 3 + \frac{4}{3}e^{2t}$

$$x(t) = x_p + x_g = 3 + \frac{4}{3}e^{2t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

حال با جایگذاری x و x' در معادله اول y حاصل می شود.

$$x'(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

از معادله اول داریم $\rightarrow \quad y=\frac{1}{4}x'+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

$$\rightarrow \quad y=\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}e^{2t}+c_1e^t-c_2e^{-t}\right)+\frac{3}{4}\left(3+\frac{4}{3}e^{2t}+c_1e^t+c_2e^{-t}\right)-\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \quad y=c_1e^t+\frac{1}{2}c_2e^{-t}+\frac{5}{3}e^{2t}+2$$

مثال (۳)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+4y \qquad x(0)=0 \qquad (1)\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-2x+3y \qquad y(0)=1 \qquad (2)\end{cases}$$

از معادله اول y و y' را محاسبه کرده و در معادله دوم جایگذاری می کنیم.

$$x'(t)=-3x+4y \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{4}x'+\frac{3}{4}x \quad\rightarrow\quad y'=\frac{1}{4}x''+\frac{3}{4}x'$$

جایگذاری در معادله دوم $\frac{1}{4}x''+\frac{3}{4}x'=-2x+\frac{3}{4}x'+\frac{9}{4}x \quad\rightarrow\quad x''-x=0$

$$m^2-1=0 \quad\rightarrow\quad m=\pm1 \quad\rightarrow\quad x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t} \quad\rightarrow\quad x'(t)=c_1e^t-c_2e^{-t}$$

حال با جایگذاری x و x' در معادله اول y حاصل می شود.

از معادله اول داریم $\rightarrow \quad y=\frac{1}{4}x'+\frac{3}{4}x \quad\rightarrow\quad y=\frac{c_1}{4}e^t-\frac{c_2}{4}e^{-t}+\frac{3}{4}c_1e^t+\frac{3}{4}c_2e^{-t}$

$$y=c_1e^t+\frac{1}{2}c_2e^{-t} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t} \xrightarrow{x(0)=0} 0=c_1+c_2\\[1ex] y(t)=c_1e^t+\frac{1}{2}c_2e^{-t} \xrightarrow{y(0)=1} 1=c_1+\frac{1}{2}c_2\end{cases}$$

از حل دستگاه داریم $\quad c_1=2 \quad , \quad c_2=-2$

$$x(t)=2e^t-2e^{-t} \qquad , \qquad y(t)=2e^t-e^{-t}$$

مثال (۴) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - e^{-t}\sin t & (1) \\ y' = 4x - y + 2e^{-t}\cos t & (2) \end{cases}$$

از معادله اول y و y' را محاسبه کرده و در معادله دوم جایگذاری می کنیم.

از معادله اول داریم :

$$y = -\frac{1}{2}x' + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{2}x'' + \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

جایگذاری در معادله دوم :

$$\rightarrow \quad -\frac{1}{2}x'' + \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t = 4x - \frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t + 2e^{-t}\cos t$$

$$\rightarrow \quad x'' - 2x' + 3x = -5e^{-t}\cos t$$

معادله فوق یک معادله مرتبه دوم غیر همگن با ضرایب ثابت است (در اینجا با روش ضرایب نامعین حل می کنیم)

$$\rightarrow \quad x'' - 2x' + 5x = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 2m + 5 = 0 \quad \xrightarrow{m=1\pm 2i} \quad x_g = e^t(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t)$$

$$x_p = \left(Ae^{-t}\sin t + Be^{-t}\cos t\right)t^0$$

$$\rightarrow \quad x_p' = -Ae^{-t}\sin t + Ae^{-t}\cos t - Be^{-t}\cos t - Be^{-t}\sin t$$

$$\rightarrow \quad x_p'' = -2Ae^{-t}\cos t + 2Be^{-t}\sin t$$

حال با جایگذاری x و x' و x'' در معادله ناهمگن خواهیم داشت :

$$-2Ae^{-t}\cos t + 2Be^{-t}\sin t + 2Ae^{-t}\sin t - 2Ae^{-t}\cos t +$$

$$2Be^{-t}\cos t + 2Be^{-t}\sin t + 5Ae^{-t}\sin t + 5Be^{-t}\cos t = -5e^{-t}\cos t$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4B+7A=0 & \rightarrow\ A=\dfrac{4}{13} \\ -4A+7B=-5 & \rightarrow\ B=-\dfrac{7}{13} \end{cases}$$

$$x=x_g+x_p=e^t(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)+\frac{4}{13}e^{-t}\sin t-\frac{7}{13}e^{-t}\cos t$$

با جایگذاری x و x' در معادله اول y هم حاصل می شود.

$$y=e^t((c_1-c_2)\cos 2t+(c_1+c_2)\sin 2t)+\frac{1}{26}e^{-t}(-32\cos t+9\sin t)-\frac{1}{2}e^{-t}\sin t$$

۶-۲-۱- تمرین : دستگاه های زیر را به روش حذفی حل کنید.

$$1)\begin{cases} x'=-x+2y \\ y'=-4x+3y \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y & x(0)=-1 \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-3y & y(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x'=x-3y & x(0)=0 \\ y'=x+y+e^t & y(0)=2 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x'=5x-5y+1 \\ y'=6x-7y+1 \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} x'=3x-2y-e^{-t}\sin t \\ y'=4x-y+2e^{-t}\cos t \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} x'=2x+y+\sin t \\ y'=x+2y+3\cos t \end{cases}$$

۶-۳- حل دستگاه دیفرانسیل با استفاده از عملگر D (اپراتور) :

در این روش با جایگذاری $D=\dfrac{d}{dt}$ ، دستگاه را با استفاده از دستور کرامر یا هر روش دیگر حل کنید.

مثال (۵) جواب دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x'=3x+y \\ y'=4x+3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Dx-3x-y=0 \\ Dy-4x-3y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(D-3)-y=0 \\ -4x+y(D-3y)=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & D-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D-3 & -1\\ -4 & D-3\end{vmatrix}}=\frac{0}{(D-3)^2-4}\ \rightarrow\ x\left(D^2-6D+5\right)=0$$

$$x''-6x+5=0\ \rightarrow\ m^2-6m+5=0\ \rightarrow\ \begin{cases}m_1=1\\ m_2=5\end{cases}$$

$$\rightarrow\ x(t)=c_1e^t+c_2e^{5t}\ \rightarrow\ x'(t)=c_1e^t+5c_2e^{5t}$$

حال x و x' در معادله اول قرار می دهیم تا y حاصل می شود.

از معادله اول داریم :

$$y=x'-3x\ \rightarrow\ y=-2c_1e^t+2c_2e^{5t}$$

مثال (۶) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+3y+2e^{2t}\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=x+4y+3e^{2t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}Dx-2x-3y=2e^{2t}\\ Dy-x-4y=3e^{2t}\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x(D-2)-3y=2e^{2t}\\ -x+y(D-4)=3e^{2t}\end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2e^{2t} & -3\\ 3e^{3t} & D-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D-2 & -3\\ -1 & D-4\end{vmatrix}}=\frac{2(D-4)e^{2t}+9e^{2t}}{D^2-6D+5}\ \xrightarrow{2D\left(e^{2t}\right)=4e^{2t}}\ \frac{5e^{2t}}{D^2-6D+5}$$

$$\left(D^2-6D+5\right)x=5e^{2t}\ \rightarrow\ x''-6x'+5x=0\ \rightarrow\ x_g=c_1e^t+c_2e^{5t}$$

$$x_p=Ae^{2t}\ \rightarrow\ x_p'=2Ae^{2t}\ \rightarrow\ x_p''=4Ae^{2t}$$

$$4Ae^{2t}-12Ae^{2t}+5Ae^{2t}=5e^{2t}\ \rightarrow\ -3A=5\ \rightarrow\ A=-\frac{5}{3}$$

$$x = x_g + x_p = c_1e^t + c_2e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t}$$

حال $x' = c_1e^t + 5c_2e^{5t} - \frac{10}{3}e^{2t}$

x و x' در معادله اول جایگذاری می کنیم تا y حاصل می شود.

از معادله اول داریم $y = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}e^{2t} \rightarrow y = \frac{1}{3}c_1e^t + c_2e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t}$

مثال (۷) جواب دستگاه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -4x + 3y + 10\cos t \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Dx + 2x - y = 0 \\ Dy + 4x - 3y = 10\cos t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D+2)x - y = 0 \\ 4x + (D-3)y = 10\cos t \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10\cos t & D-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D+2 & -1 \\ 4 & D-3 \end{vmatrix}} = \frac{10\cos t}{D^2 - D - 2} \rightarrow x'' - x' - 2x = 10\cos t$$

$$\rightarrow x'' - x' - 2x = 0 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$x_g = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \rightarrow x_p = A\sin t + B\cos t$$

با قرار دادن x_p و x'_p و x''_p در معادله داریم :

$$x_p = -\sin t - 3\cos t$$

$$x = x_p + x_g = -\sin t - 3\cos t + c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$$

$$x' = -\cos t + 3\sin t - c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t}$$

حال با قرار دادن x و x' در معادله اول y را بدست می آوریم.

$$y=x'+2x \quad\rightarrow\quad y=c_1e^{-t}+4c_2e^{2t}-7\cos t+\sin t$$

۶-۳-۱- تمرین : دستگاه های زیر را با عملگر D حل کنید.

$$1)\begin{cases} x'=x+3y-3e^{2t} \\ y'=4x+2y-4e^{t}\end{cases}$$

$$4)\begin{cases} (D-3)x+y=-1 \\ -x+(D-1)y=4e^{t}\end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x'=3x+1-t \\ y'=-5x+y+2t-1\end{cases}$$

$$5)\begin{cases} x'+x+2y=1 \\ 2x'+x+y'+3y=e^{t}\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2+\sin t \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+2x_2+3\cos t\end{cases}$$

$$6)\begin{cases} y_1'-6y_1+3y_2=8e^{x} \\ -2y_1+y_1'-4y_2=4e^{x}\end{cases}$$

۶-۴- حل دستگاه معادلات با استفاده از تبدیل لاپلاس :

در این روش از تک تک معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می گیریم و سپس تبدیل لاپلاس متغیرها را بدست می آوریم و مرتب می کنیم و در انتها لاپلاس معکوس می گیریم تا جواب حاصل شود.

مثال (۸) دستگاه زیر را به روش لاپلاس حل کنید ؟

$$\begin{cases} x'=x-2y & x(0)=1 \\ y'=4x+5y & y(0)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} L\{x'\}=L\{x\}-2L\{y\} \rightarrow SL\{x\}-x(0)=L\{x\}-2L\{y\} \\ L\{y'\}=4L\{x\}+5L\{y\} \rightarrow SL\{y\}-y(0)=4L\{x\}+5L\{y\}\end{cases}$$

$$\begin{cases} L\{x\}(S-1)+2L\{y\}=1 \\ -4L\{x\}+L\{y\}(S-5)=0\end{cases}$$

با روش کرامر $L\{x\}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & S-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}S-1 & 2\\ -4 & S-5\end{vmatrix}}=\dfrac{S-5}{S^2-6S+13}$

$$L\{x\}=\frac{S-3-2}{(S-3)^2+4} \rightarrow x(t)=L^{-1}\left\{\frac{S-3}{(S-3)^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{(S-3)^2+4}\right\}$$

$$x(t)=e^{3t}\cos 2t-e^{3t}\sin 2t \rightarrow x'(t)=e^{3t}\cos 2t-5e^{3t}\sin 2t$$

حال با جایگذاری x و x' در معادله اول y را بدست می آوریم.

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x' \rightarrow y=2e^{3t}\sin 2t$$

مثال (۹) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'(t)=4x-3y+e^t \\ y'(t)=3x-2y+e^t \end{cases} \qquad x(0)=y(0)=0$$

فرض : در برخی مواقع برای راحتی در نوشتن به جای $L\{x\}=X$ و به جای $L\{y\}=Y$ استفاده می کنند (مثل این مثال)

$$\begin{cases} L\{x'(t)\}=4L\{x\}-3L\{y\}+L\{e^t\} \\ L\{y'(t)\}=L\{x\}-2L\{y\}+L\{e^t\} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} SX-x(0)=4X-3Y+\dfrac{1}{S-1} \\ SY-y(0)=3X-2Y+\dfrac{1}{S-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X(S-4)+3Y=\dfrac{1}{S-1} \\ -3X+Y(S+2)=\dfrac{1}{S-1} \end{cases}$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{1}{S-1} & 3\\ \dfrac{1}{S-1} & S+2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}S-4 & 3\\ -3 & S+2\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{S+2}{S-1}-\dfrac{2}{S-1}}{S^2-2S-8+9} \rightarrow x=\frac{\dfrac{S-1}{S-1}}{S^2-2S+1}$$

$$X=\frac{1}{(S-1)^2} \rightarrow L^{-1}\{X\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(S-1)^2}\right\} \rightarrow x(t)=e^t t \rightarrow x'(t)=e^t t+e^t$$

با جایگذاری x و x' در معادله اول y را بدست می آوریم.

از معادله اول داریم :

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}x'+\frac{e^t}{3} \rightarrow y=\frac{4}{3}e^t t-\frac{1}{3}e^t t-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{3}e^t \rightarrow y=t e^t$$

مثال (۱۰) یک جواب خصوصی برای دستگاه زیر بیابید.

$$\begin{cases} x'(t)=-2x+y & x(0)=3 \\ y'(t)=-3x+2y+2\sin t & y(0)=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\{x'(t)\}=-2L\{x\}+L\{y\} \\ L\{y'(t)\}=-3L\{x\}+2L\{y\}+2L\{\sin t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} SL\{x\}-3=-2L\{x\}+L\{y\} \\ SL\{y\}-4=-3L\{x\}+2L\{y\}+\frac{2}{S^2+1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} L\{x\}(S+2)-L\{y\}=3 \\ 3L\{x\}+L\{y\}(S-2)=\frac{2}{S^2+1}+4 \end{cases}$$

$$L\{x\}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ \frac{2}{S^2+1}+4 & S-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S+2 & -1 \\ 3 & S-2 \end{vmatrix}}=\frac{3S-6+\frac{2}{S^2+1}+4}{S^2-4+3}=\frac{3S^3-2S^2+3S}{(S^2-1)(S^2+1)}$$

تجزیه کسر $-\dfrac{3S^3-2S^2+3S}{(S^2-1)(S^2+1)}=\dfrac{A}{S-1}+\dfrac{B}{S+1}+\dfrac{CS+D}{S^2+1}=$

$$\frac{AS^3+AS^2+AS+A+BS^3-BS^2+BS-B+CS^3+DS^2-CS-D}{(S^2-1)(S^2+1)}=$$

$$\frac{S^3(A+B+C)+S^2(A-B+D)+S(A+B-C)+A-B-D}{(S^2-1)(S^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 & (1)\\ A-B+D=-2 & (2)\\ A+B-C=3 & (3)\\ A-B-D=0 & (4)\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}(1)+(3)\\(2)+(4)\end{matrix} \rightarrow \begin{cases}2A+2B=6\\ 2A-2B=-2\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}A=1\\B=2\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}C=0\\D=-1\end{matrix}$$

پس :

$$L\{x\}=\frac{1}{S-1}+\frac{2}{S+1}-\frac{1}{S^2+1}$$

$$x(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2+1}\right\}$$

$$x(t)=e^t+2e^{-t}-\sin t$$

$$x'(t)=e^t-2e^{-t}-\cos t$$

x و x' را در معادله اول قرار می دهیم تا y حاصل شود.

$$x'(t)=-2x+y \rightarrow y=x'+2x \rightarrow$$

$$y=e^t-2e^{-t}-\cos t+2e^t+4e^{-t}-2\sin t \rightarrow y=3e^t+2e^{-t}-2\sin t-\cos t$$

مثال (۱۱) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'=x+y+u_2(t)\\ y'=-x-y\end{cases} \qquad x(0)=y(0)=0$$

$$\begin{cases} L\{x'\}=L\{x\}+L\{y\}+L\{u_2(t)\}\\ L\{y'\}=-L\{x\}-L\{y\}\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} SL\{x\}-x(0)=L\{x\}+L\{y\}+\frac{1}{S}e^{-2S} \\ SL\{y\}-y(0)=-L\{x\}-L\{y\} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} L\{x\}(S-1)-L\{y\}=\frac{1}{S}e^{-2S} \\ L\{x\}+L\{y\}(S+1)=0 \end{cases}$$

$$L\{x\}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{S}e^{-2S} & -1 \\ 0 & S+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S-1 & -1 \\ +1 & S+1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{S+1}{S}e^{-2S}}{S^2-1+1} \rightarrow L\{x\}=\frac{(S+1)e^{-2S}}{S^3}$$

$$x(t)=L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{S^2}+\frac{1}{S^3}\right)e^{-2S}\right\} \rightarrow x(t)=\left[(t-2)+\frac{1}{2}(t-2)^2\right]u_2(t)$$

$$L\{y\}=\frac{\begin{vmatrix} S-1 & \frac{1}{S}e^{-2S} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S-1 & -1 \\ +1 & S+1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{-1}{S}e^{-2S}}{S^2-1+1}=\frac{-1}{S^3}e^{-2S}$$

$$y(t)=-L^{-1}\left\{\frac{1}{S^3}e^{-2S}\right\} \rightarrow y(t)=-\frac{1}{2}(t-2)^2u_2(t)$$

مثال (۱۲) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'-3x-5y=\delta(t-1)e^t & x(0)=1 \\ 5x-3y+y'=0 & y(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\{x'(t)\}-3L\{x\}-5L\{y\}=L\{\delta(t-1)e^t\} \\ 5L\{x\}-3L\{y\}+L\{y'\}=L\{0\} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} SL\{x\}-1-3L\{x\}-5L\{y\}=e^{1-S} \\ 5L\{x\}-3L\{y\}+SL\{y\}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L\{x\}(S-3)-5L\{y\}=e^{1-S}+1 \\ 5L\{x\}+L\{y\}(S-3)=0 \end{cases}$$

$$L\{x\}=\frac{\begin{vmatrix} e^{1-S}+1 & -5 \\ 0 & S-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S-3 & -5 \\ 5 & S-3 \end{vmatrix}}=\frac{(S-3)(e^{1-S}+1)}{(S-3)^2+25} \rightarrow$$

$$x(t)=L^{-1}\left\{\left(\frac{(S-3)e^1}{(S-3)^2+25}\right)e^{-S}\right\}+L^{-1}\left\{\left(\frac{(S-3)}{(S-3)^2+25}\right)\right\} \rightarrow$$

$$x(t)=ee^{3(t-1)}\cos 5(t-1)u_1(t)+e^{3t}\cos 5t$$

$$x(t)=e^{3t-2}\cos 5(t-1)u_1(t)+e^{3t}\cos 5t$$

$$L\{y\}=\frac{\begin{vmatrix} S-3 & e^{1-S}+1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S-3 & -5 \\ 5 & S-3 \end{vmatrix}}=\frac{-5(e^{1-S}+1)}{(S-3)^2+25} \rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{5e^1e^{-s}}{(S-3)^2+25}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{5}{(S-3)^2+25}\right\} \rightarrow$$

$$y(t)=-e^{+1}e^{3(t-1)}\sin 5(t-1)-e^{3t}\sin 5t$$

$$y(t)=-e^{+1}e^{3(t-1)}\sin 5(t-1)u_1(t)-e^{3t}\sin 5t$$

$$y(t)=-u_1(t)e^{3t-2}\sin 5(t-1)u_1(t)-e^{3t}\sin 5t$$

مثال (۱۳) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1' + \int_0^t y_2(x)dx = t \\ \int_0^t y_1(x)dx + y_2' = 1 \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0$$

$$\begin{cases} L\{y_1'\} = L\left\{\int_0^t y_2(x)dx\right\} = L\{t\} \\ L\left\{\int_0^t y_2(x)dx\right\} + -L\{y_2'\} = L\{1\} \end{cases} \to \begin{cases} SL\{y_1\} - y_1(0) + \frac{1}{S}L\{y_2\} = \frac{1}{S^2} \\ \frac{1}{S}L\{y_1\} + SL\{y_2\} - y_2(0) = \frac{1}{S} \end{cases}$$

بعد از تجزیه کسر

$$L\{y_1\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{S^2} & \frac{1}{S} \\ \frac{1}{S} & S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S & \frac{1}{S} \\ \frac{1}{S} & S \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S^2}}{S^2 - \frac{1}{S^2}} = \frac{\frac{S-1}{S^2}}{\frac{S^4-1}{S^2}} = \frac{(S-1)}{(S^2-1)(S^2+1)} = \frac{1}{(S+1)(S^2+1)}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{-S+1}{S^2+1}\right\} \to y_1 = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

حال y_1 را در رابطه دوم قرار می دهیم تا y_2 حاصل شود.

$$\int_0^t \left(\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)dx + y_2' = 1$$

$$\to \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x \Big|_0^t + y_2' = 1$$

$$\to -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + y_2' = 1$$

$$\to y_2' = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t \xrightarrow{\int dt} y_2 = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t$$

۶-۴-۱- تمرین : دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

1) $\begin{cases} y_1' - 6y_1 + 3y_2 = 8e^x & y_1(0) = -1 \\ -2y_1 + y_2' - y_2 = 4e^x & y_2(0) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x' + y' - y = t & y(0) = 1 \\ x' + y' = t^2 & x(0) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + e^t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$

4) $\begin{cases} x' = 3x - 4y & x(0) = 1 \\ y' = x - y & y(0) = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x'(t) = 4x - 3y + e^t \\ y'(t) = 3x - 2y + e^t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$

6) $\begin{cases} 2x' + x - y = 2 & x(0) = 0 \\ y' - x' + 2y = 2 & y(0) = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x' + \int_0^t x(u)\,du = t \\ y' + \int_0^t y(u)\,du = t^2 \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$

8) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2u_1(t) & x(0) = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 - y + u_1(t) & y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

9) $\begin{cases} x' = 2x - 5y - \cos t \\ y' = x - 2y + \sin t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$

10) $\begin{cases} x' = 2x - 2y & x(0) = 1 \\ y' = 4x - 2y + u_\pi(t) & y(0) = 0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x'(t) = 2x + y + \sin t \\ y'(t) = x + 2y + 3\cos t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = -1$

12) $\begin{cases} x'' + y = -2 & x(0) = x'(0) = 0 \\ x + y'' = 0 & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x' = 2x + y + \sin t & x(0) = 0 \\ y' = x + 2y + 3\cos t & y(0) = -1 \end{cases}$

« موفقیت روزافزون شما دانشجویان عزیز را آرزومندم »

حسن پور