

استاتیک : J.L. Meriam, L.G. Kraige, J.N. Bolton, Engineering Mechanics, Statics
8th edition, Wiley

فصل اول : استاتیک و مقدمه ای بر آن

مکانیک علم شناسایی نیرو و تأثیر آن بر اجسام است. هر چند قوانین حاکم در مکانیک ظاهراً در هندسه و فیزیک و مباحث کاربردی دارند. علم مکانیک دارای قدمت بسیار زیادی است (از سده ۲۸۷-۲۴۲ قبل از میلاد در مورد نیروی بویانی مائیکل راتچ مطرح کرد). گالیله، نیوتن، دایوینچی، اویلر، دالامبر، لاکرانژ، لاپلاس، لژاندر و غیره این علم بسیار زینت کرده اند.

علم مکانیک ← استاتیک : تعادل اجسام در معرض نیروی وارد بر آن
← دینامیک : حرکت اجسام در معرض نیروی وارد بر آن

مفاهیم پایه : فضا : به مجموعه هندسی اطلاق می شود که اجسام مختلف را شامل می شود و مکان اجسام توسط فواصل در آن نسبت به فضا بیان می شود. در مسائل ۳ بعدی سه مختصات مستقل و در مسائل دو بعدی دو مختصات مستقل لازم است. زمان : معیار توانایی در رخداد است. در مسائل استاتیک چندان زمان درگیر نیست. جرم : معیار از یک جسم و مقادیر آن در برابر تغییر سرعت است. جرم یک جسم همچنین در نیروی که از طرف اجسام دیگر بر آن وارد می شود بهر هم است.

نیرو : اثر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می نامند. اثر یک نیرو با محل اثر آن و جهت آن مشخص می شود. ذره : جسمی است که ابعاد آن ناچیز است. به عبارت دیگر می توان آن را تنها به عنوان یک نقطه در نظر گرفت. جسم صلب : جسمی را صلب می نامیم که تغییر شکل بین نقاط آن در برابر بارهایی که در دست حل هستند ناچیز باشد.

در استاتیک اصولاً با نیروی بی که بر اجسام صلب عمل می کند سروکار داریم

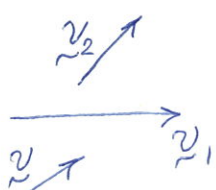
← اسکانر : تنها با اندازه مشخص می شوند (زمان، حجم، چگالی، انرژی، جرم)

← کمیت در استاتیک : بر دارنده علامه بر اندازه دارای جهت هستند (جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو، گشتاور)

- بردار آزاد (Free): عکس‌الزمان محدود، خط خاصی در فضاست.
- بردار قابل لغزش (Sliding): عکس‌الزمان محدود، خط خاصی است، نقطه اثر آن مشخص نیست.
- بردار محکم (Fixed): در آن حالت نقطه اثر بردار کاملاً مشخص شده است.
- لازم به ذکر است که عموماً اندازه یک بردار V ، صورت $|V|$ نشان داده می‌شود.

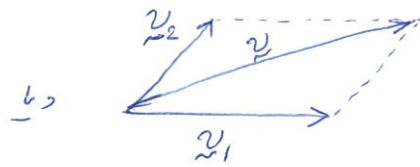
کار کردن با بردار:

جمع بردار:



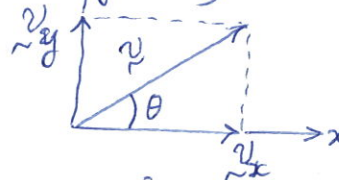
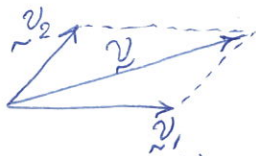
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$(|v| = |v_1| + |v_2|)$$



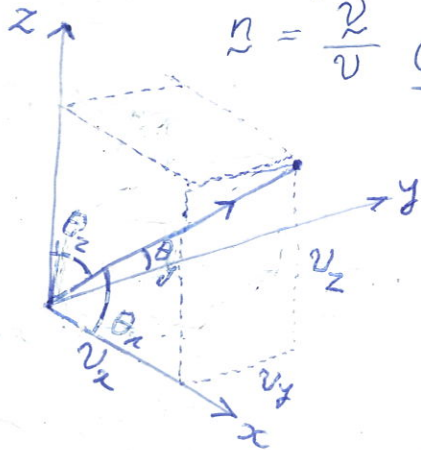
بردار $-v$ - بردار است که از نقطه اندازه v هم اندازه است ولی جهت آن 180° با v تفاوت دارد.

به هر دو بردار که جمع آن یک بردار را تشکیل دهد مؤلفه‌های آن بردار نامیده می‌شوند. معمولاً از مؤلفه‌های عمود بر هم استفاده می‌شود.



$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

چنانچه بردار v را به n بنام می‌توان نوشت $\vec{v} = v \hat{n}$ بنابرین $\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$



در حالت سه بعدی نیز $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

$$v_x = v \cos \theta_x, \quad v_y = v \cos \theta_y, \quad v_z = v \cos \theta_z$$

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ زوایای بردار V با محورهای x, y, z هستند در ضمن

$$(\cos \theta_x)^2 + (\cos \theta_y)^2 + (\cos \theta_z)^2 = 1, \quad |V|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

قانون اول: یک ذره چنانچه بر آن نیروی دارد بر آن صفر باشد در حال سکون است یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

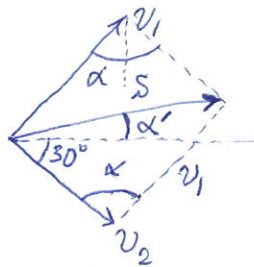
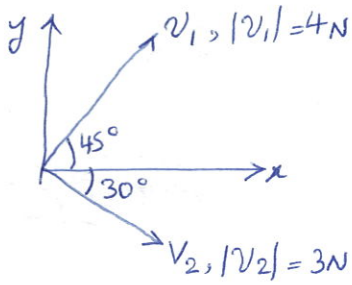
قانون دوم: نسبت یک ذره با بر آن نیروی دارد بر ذره هم راست است.

قانون سوم: نیروی کش و دافش بین دو ذره از لحاظ اندازه برابر ولی دارای جهت های عکس هستند.

سیستم SI (کلیه‌ی اصلی زمان، طول، جرم هستند) $N = kg \frac{m}{s^2}$ واحد است

سیستم U.S. (کلیه‌ی اصلی زمان، طول نیرو هستند) $slug = \frac{lb}{ft/sec^2}$ واحد است

نسبت جاذبه در سیستم S.I. $9.81 \frac{m}{s^2}$ در سیستم U.S. $32.17 \frac{ft}{sec^2}$ قرار داده می‌شود



مثال: برای بردارهای v_1 و v_2 در شکل مقابل

الف) محاسبه‌ی فی‌سبب اندازه بردار $S = v_1 + v_2$

$$S^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \cos 105^\circ = 31.212 \Rightarrow S = 5.587N$$

ب) زاویه بردار S را با محور x بیابید

$$\frac{S}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{\sin(30 + \alpha')} \Rightarrow \sin(30 + \alpha') = \frac{4}{5.587} \sin 105 = 0.692 \Rightarrow 30 + \alpha' = 43.79^\circ \Rightarrow \alpha' = 13.79^\circ$$

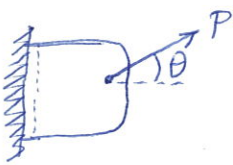
ج) بردار S را به اجزای x و y تجزیه کنید و بردار S را به اجزای x و y بیابید

$$S_x = v_1 \cos 45^\circ + v_2 \cos 30^\circ = 5.587 [\cos 13.79^\circ + \sin 13.79^\circ] = 5.426 + 1.332$$

$$n = \frac{S_x}{S} = \frac{5.426 + 1.332}{5.587} = 0.971 + 0.238j$$

د) بردار $v_1 - v_2$ را به صورت بردار x و y بیابید

$$v_1 - v_2 = 4 (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) - 3 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 0.230 + 4.328j$$



فصل دوم: سیستم‌های نیرو

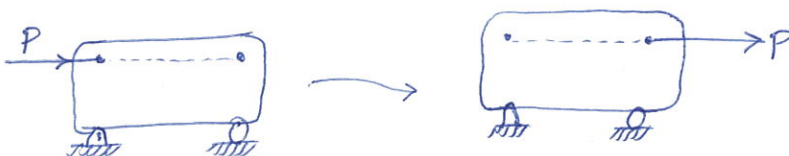
تک‌نقطه مقابل را که به دیوار متصل است در نظریه‌ی تیریم که توسط نیروی P کشیده می‌شود

حرکت تغییر در اندازه است و محل اثر نیروی P را که نیروی P در حجم و نقطه را تغییر دهد. ضمناً تغییر شکل نقطه نیز تحت

تأثیر این سه پارامتر خواهد بود.

اصل انتقال: با توجه به اینکه در حجم صلب از تغییر شکل صرف‌نظر می‌شود و تنها به تحلیل نیروی دایره‌ای می‌شود. در این موارد می‌توان

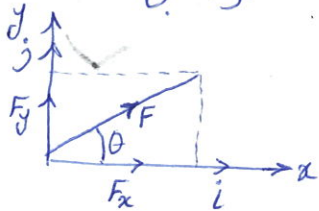
به نظریه‌ی آیر که نیازی نیست که اثر نیروی اعمالی را به یک نقطه محدود کرد و می‌توان نیرو را انتقال داد مانند موارد زیر



نیروی تماسی (Contact Force) مانند نیروی تماس بین دو جسم
 نیروی بدنی (Body Force) نیرویی که در درون حجم توزیع می شود مانند وزن

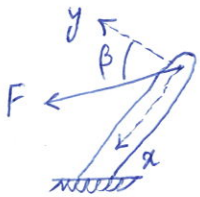
نیروی متمرکز: (concentrated)
 نیروی پخش: (Distributed) مانند نیروی ناشی از تماس بین دو جسم
 نیروی سطحی
 نیروی حجمی

سیستم نیروی در دو بعد:



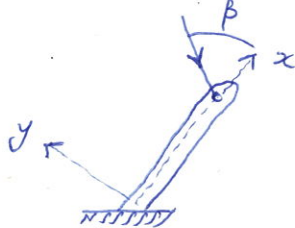
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

$$F_x = F \cos \theta, F_y = F \sin \theta, F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$



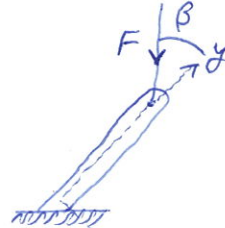
$$F_y = F \cos \beta$$

$$F_x = F \sin \beta$$



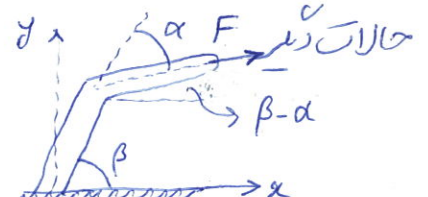
$$F_x = -F \cos \beta$$

$$F_y = -F \sin \beta$$



$$F_x = F \sin \beta$$

$$F_y = -F \cos \beta$$



$$F_x = F \cos (\beta - \alpha)$$

$$F_y = F \sin (\beta - \alpha)$$

مثال: دو نیروی P و T به نقطه B از سازه مقابل اعمال می شوند. برای پیدا کردن واکنش بردار R در A و C:

$$\tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{6 \sin 60^\circ}{3 + 6 \cos 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{3+3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \Rightarrow$$

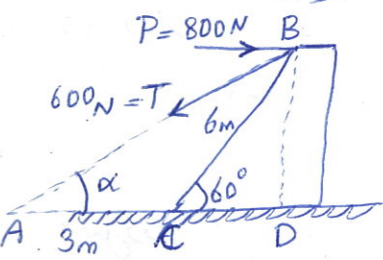
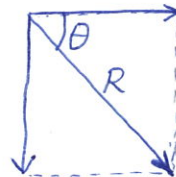
$$\alpha = 40.9^\circ$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{T} = 800 \hat{i} + 600 (-\cos 40.9^\circ \hat{i} - \sin 40.9^\circ \hat{j}) \Rightarrow$$

$$\vec{R} = 346.49 \hat{i} - 392.84 \hat{j} \Rightarrow$$

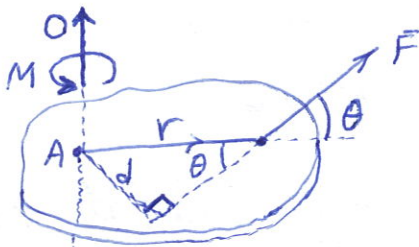
$$R = \sqrt{(346.49)^2 + (392.84)^2} = 523.8 \text{ N}, \tan \theta = \frac{392.84}{346.49} = 1.134 \Rightarrow$$

$$\theta = \text{Arctan } 1.134 = 48.6^\circ$$



لنگاور (مان) همزمان که نیروی راندن را برای حرکت جسم در راستای انباش با شدی تواند باعث چرخش جسم حول نقطه دایره محور خاصی نیز باشد.

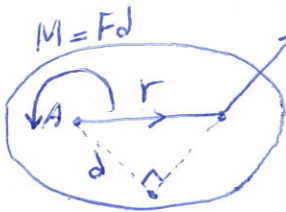
لنگاورانی از نیروی F به صورت زیر تعریف می شود



$$M = Fd$$

این لنگاور بر دوشوئی F و فاصله d به دو دایست، جهت M را می توان با قانون دست راست تعیین کرد. بنابراین M نیز لنگاور است و ماهیت برداری دارد. لنگاور را می توان حول هر نقطه و حول محوری

تعیین کرد. واحد آن $N.m$ است و در سیستم U.S. دارای واحد $lb.ft$ است.



$$M = Fd$$

راه دیگر برای تعیین لنگاور استفاده از ضرب برداری است: لنگاور نیروی F :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

به صورت زیر تعریف می شود.

$$M = rF \sin \theta = Fd$$

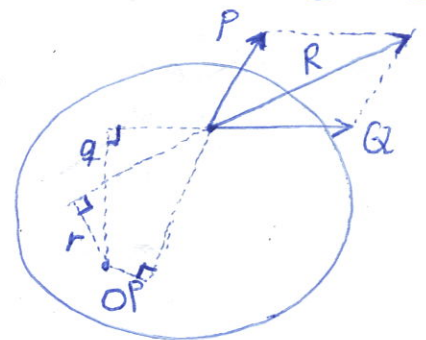
اندازه M برابر است با

که d را بازوی لنگاور نیروی نامیم. جهت چرخش را می توان با استفاده از قانون دست راست بدست آورد.

فصله دارینون: لنگاور یک نیرو حول نقطه مشخص برابر با لنگاور مولفه های همان نیرو حول آن نقطه است.

$$M_O = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{Q}) = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q}$$

$$M_O = rR = qQ - pP$$

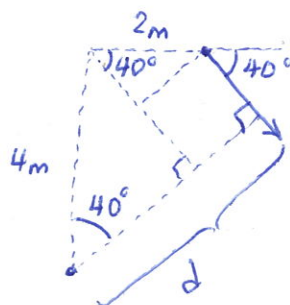
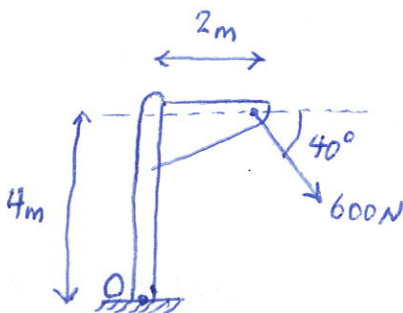


مثال: لنگاور نیروی 600 نیوتنی متقابل را حول نقطه O بیابید.

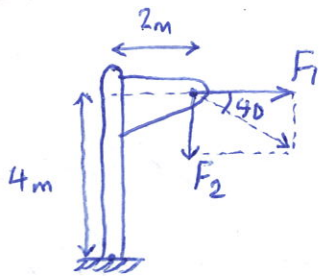
حل اول:

$$d = 4 \cos 40^\circ + 2 \sin 40^\circ = 4.35 \text{ m}$$

$$M_O = Fd = 600 \times 4.35 = 2610 \text{ N.m}$$

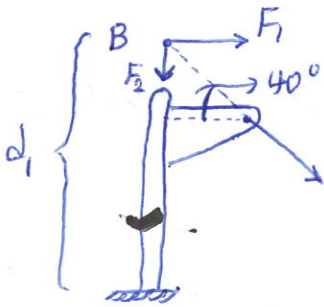


حل دوم: بگنگ قسمه دارینون نیرو را دو مولفه ای جابجایی کنیم



$$M_O = 4F_1 + 2F_2 = 4 \times 600 \cos 40^\circ + 2 \times 600 \sin 40^\circ = 2400 \cos 40^\circ + 1200 \sin 40^\circ = 2610 \text{ N.m}$$

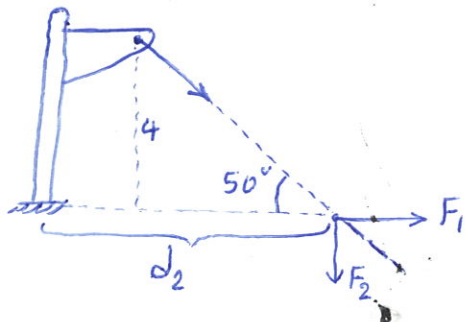
حل سوم: بگنگ قسمه انتقال نیروی F را به نقطه B انتقال می دهیم
مولفه F2 نیروی نزاد و موازی مولفه F1 کشاور دارد



$$M_O = F_1 d_1 = 600 \cos 40^\circ (4 + 2 \tan 40^\circ) =$$

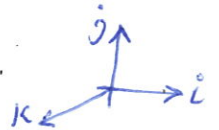
$$459.626 \times 5.678 = 2610 \text{ N.m}$$

حل چهارم: بگنگ قسمه انتقال نیروی F را به نقطه C انتقال می دهیم



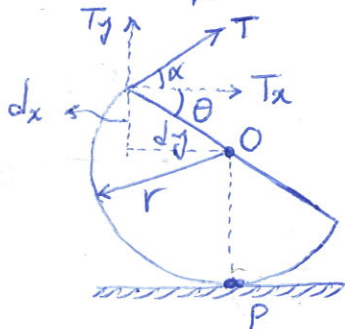
$$M_O = F_2 d_2 = 600 \sin 40^\circ (2 + 4 \tan 50^\circ) =$$

$$385.672 \times 6.767 = 2610 \text{ N.m}$$



$$M_O = \vec{r} \times \vec{F} = (2\hat{i} + 4\hat{j}) \times (600 \cos 40^\circ \hat{i} - 600 \sin 40^\circ \hat{j}) =$$

$$-1200 \sin 40^\circ \hat{k} - 2400 \cos 40^\circ \hat{k} = -2610 \hat{k} \text{ N.m}$$



مثال: شعاع نیروی T را حول نقاط O و P بیابید

اگر T را به صورت دو مولفه افقی و قائم در نظر بگیریم:

$$M_O = T_x d_x + T_y d_y = T \cos \alpha r \sin \theta + T \sin \alpha r \cos \theta =$$

$$Tr (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) = Tr \sin(\alpha + \theta)$$

چون خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است OP خط عمودی است و بنابراین

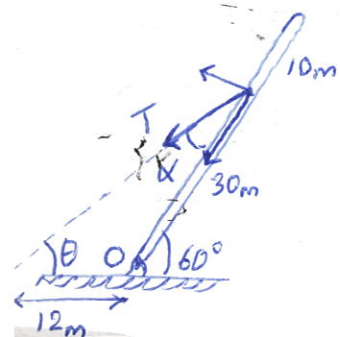
$$M_P = T_x (d_x + r) + T_y d_y = Tr \sin(\alpha + \theta) + Tr \cos \alpha$$

مثال: برای بلند کردن تیر به مقابله کشاور 72 KN.m لازم است. نیروی مورد نیاز در گنگ

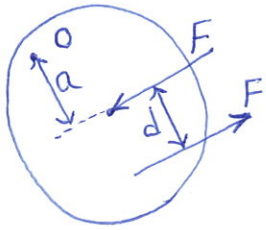
$$\tan \theta = \frac{30 \sin 60^\circ}{12 + 30 \cos 60^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{12 + 15} = 0.962 \Rightarrow \theta = 43.9^\circ$$

$$\alpha = 180 - 120 - \theta = 180 - 120 - 43.9^\circ = 16.1^\circ$$

$$M_O = T \sin \alpha \cdot 30 \Rightarrow T = \frac{72 \text{ KN.m}}{30 \sin 16.1^\circ} = 8.654 \text{ KN.}$$



لکوپل (زوج نیرو): شتاب در وجود آفده توسط دو نیروی هم اندازه در جهت 180° را کوپل می‌نامند



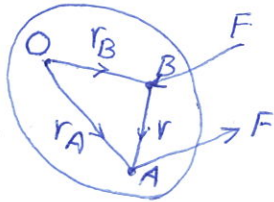
اگر این دو نیرو را نمی‌توان حذف کرد زیرا هر چند که نیروی خالص آنها برابر صفر است ولی باعث بوجود آمدن چرخش می‌شوند. شتاب را حول هر نقطه درخواه O برای است:

$$M = (a+d)F - aF = dF$$

شتاب بالا به صورت پاد ساعت است.

اندازه این شتاب مستقل از موقعیت نقطه O است. شتاب حاصل به موقعیت نقطه O ربطی ندارد و همواره ثابت است.

اگر شتاب را از دوین برداری می‌سازیم

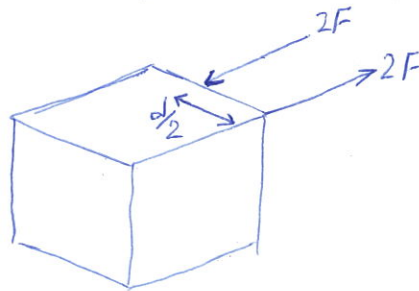
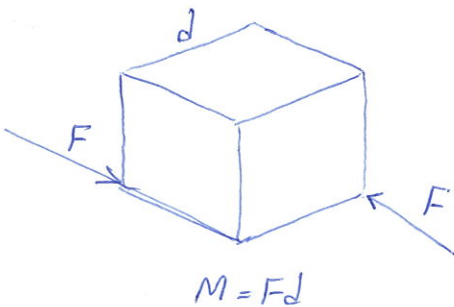
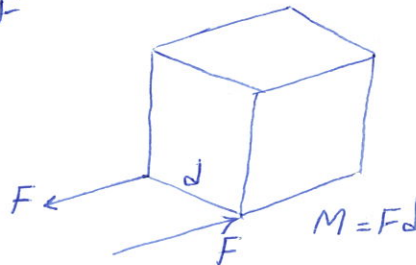
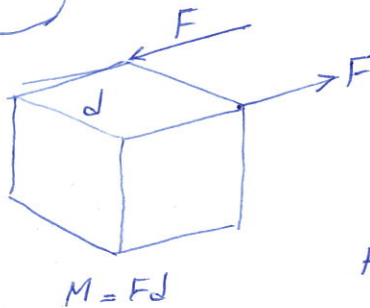


$$M = r_A \times F + r_B \times (-F) = (r_A - r_B) \times F = r \times F$$

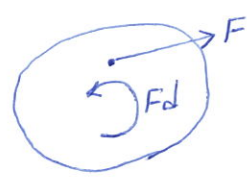
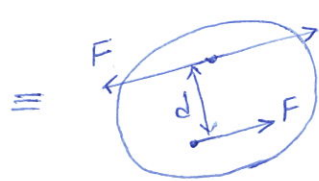
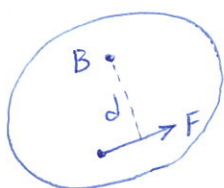
پس اثر زوج نیرو تنها یک شتاب است و بنابراین می‌توان اثر آن را به صورت زیر

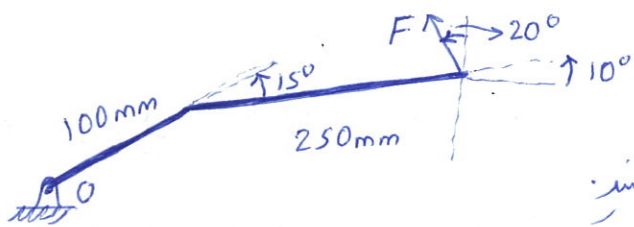
نشان داد. این شتاب در یک بردار آزاد است و مستقیماً جای خاصی نیست.

وقت کنیم که سیستمی زیر با هم اهم ارز هستند.



لازم به ذکر است که می‌توان اثر یک نیرو را با یک نیروی شتاب‌زاکنین کرد

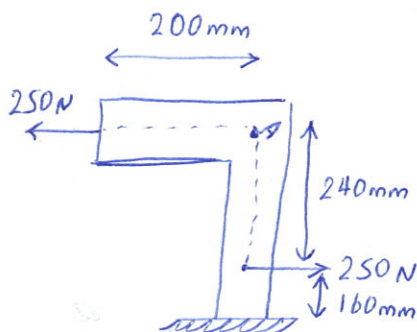




مثال: نیروی: اندازه 50N؛ نقطه زن داده شده
اعمال شده است. این نیرو را بکلی نیرو-گشتاور جابجایی کنید.

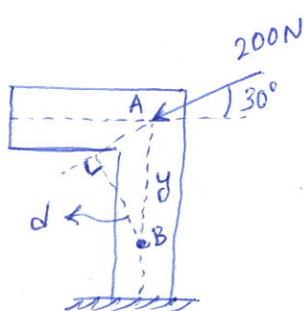
$$M_O = 50 \cos 20^\circ (0.1 \cos 25^\circ + 0.25 \cos 10^\circ) + 50 \sin 20^\circ (0.1 \sin 25^\circ + 0.25 \sin 10^\circ) = 17.29 \text{ N.m}$$

$$\Rightarrow R = 50 \text{ N.m} \quad \angle 110^\circ \quad M = 17.29 \text{ N.m}$$



مثال: عضو زن داده شده در معرض دو نیروی 250N نیرویی قرار دارد.

اگر این دو نیرو همدار است؛ دو نیرو یکی از A ردگیری در B جابجایی شود فواصل نقطه B را بنویسید.



باید نیرویی دیکتا؛ همان اندازه در B اعمال شود تا شل زوج شود و در حد

در این صورت:

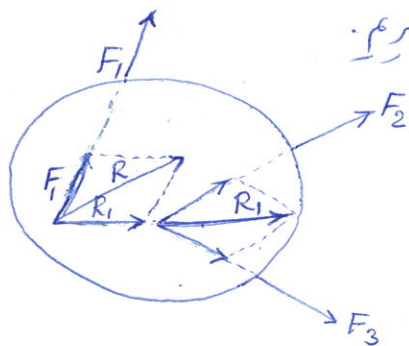
$$250 \text{ N} \times 240 \text{ mm} = 200 \text{ N} \times y \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$y = \frac{250 \times 240}{200 \cos 30^\circ} = 346.4 \text{ mm}$$

برآیند (مستقیم) Resultant

در استاتیک معادله‌های مسابلی سر و کار داریم که بیش از یک نیرو یا گشتاور ساده اعمال شده است و بنا بر این نیاز داریم که

اگر آن را جابجایی کنیم؛ عنوان مثال سه نیروی F_1, F_2, F_3 را در نقطه‌ای جمع.



$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots$$

$$\theta = \text{Arctan} \frac{R_y}{R_x}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

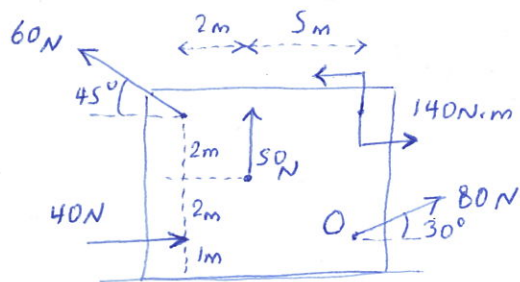
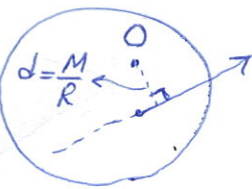
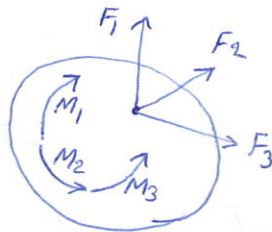
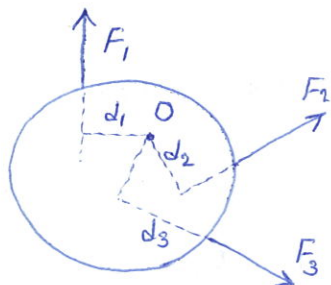
روش جبری برای ترکیب برآیند نیرو

(1) نقطه‌ای از سیستم را انتخاب می‌کنیم و نیرو را به آن نقطه منتقل می‌کنیم در این حالت گشتاور حاصل را نیز باید

در نظر گرفت

(2) کل نیرو را با هم و کل گشتاور را با هم جمع می‌کنیم تا نیروی برآیند و گشتاور برآیند را بیابیم

(3) می‌توانیم یک نیروی معادل را با داشتن گشتاور و نیروی سبب کنیم



فصل: برآیند نیروی دلتا و در بار بر نقطه مقابل را بیابید.

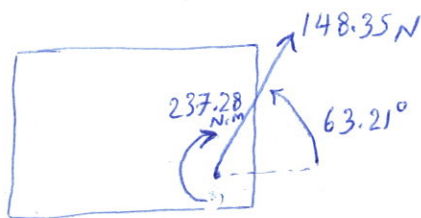
$$R_x = \sum F_x = 40 + 80 \cos 30^\circ - 60 \cos 45^\circ = 66.86 \text{ N}$$

$$R_y = \sum F_y = 50 + 80 \sin 30^\circ + 60 \sin 45^\circ = 132.43 \text{ N}$$

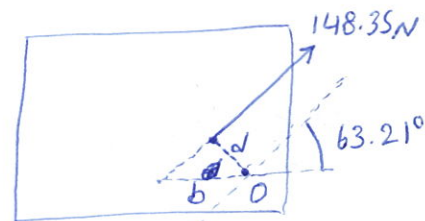
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{66.86^2 + 132.43^2} = 148.35 \text{ N}$$

$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan \frac{132.43}{66.86} = 63.21^\circ$$

$$M_O = 140 - 50 \times 5 - 60 \sin 45^\circ \times 7 + 60 \cos 45^\circ \times 4 = -237.28 \text{ N.m}$$



$$d = \frac{237.28 \text{ N.m}}{148.35} = 1.60 \text{ m}$$



اگر بخواهیم نقطه ای را بیابیم که با O روی یک خط افقی باشد و R_x حذف خواهد شد و تنها R_y باقی بماند

$$b R_y = M_O \Rightarrow b = \frac{237.28}{132.43} = 1.792 \text{ m}$$

$$M_O = -237.28 \text{ N.m}$$

$$\vec{R} = 66.86 \hat{i} + 132.43 \hat{j}$$

$$M_O = \vec{r} \times \vec{R} \Rightarrow -237.28 \text{ N.m} = (x \hat{i} + y \hat{j}) \times (66.86 \hat{i} + 132.43 \hat{j}) \Rightarrow$$

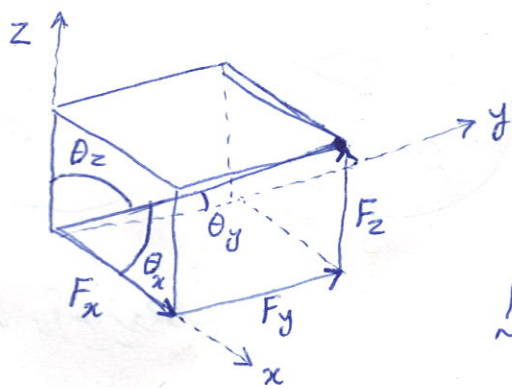
$$-237.28 = 132.43x - 66.86y \Rightarrow 132.43x - 66.86y + 237.28 = 0$$

$$y = 1.98x + 3.548$$

معادله خط بالاسمان مثل اثر بردار R را نشان می دهد اگر ساده کنیم

فاصله b برابر خواهد بود با b = -1.792 m که با جواب نسبت مثلثاتی دارد.

سیستم بی‌بندی سه بعدی



انفصال مختصات کارتزین

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

که

$$F_x = F \cos \theta_x, F_y = F \cos \theta_y, F_z = F \cos \theta_z$$

و با

$$\underline{F} = F \left(\underbrace{\cos \theta_x}_{l} \underline{i} + \underbrace{\cos \theta_y}_{m} \underline{j} + \underbrace{\cos \theta_z}_{n} \underline{k} \right)$$

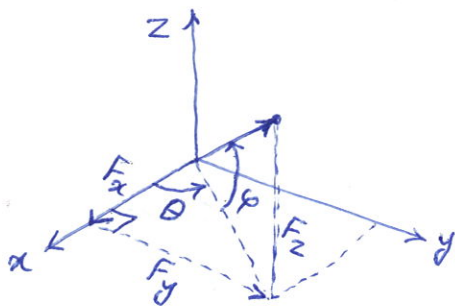
و با

$$\underline{F} = F (l \underline{i} + m \underline{j} + n \underline{k}) = F \underline{n}_F$$

اندازه بردار $\underline{F}$ برابر است با

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

این بردار به یک دوزاویه



$$F_{xy} = F \cos \varphi, F_z = F \sin \varphi$$

$$\Rightarrow F_x = F_{xy} \cos \theta = F \cos \varphi \cos \theta$$

$$F_y = F_{xy} \sin \theta = F \cos \varphi \sin \theta$$

$$\underline{P} \cdot \underline{Q} = PQ \cos \theta$$

همه با حالت دوعبدي در حالت سه بعدی نیز می‌توان نوشت
که زاویه بین دو بردار $\underline{P}$ و $\underline{Q}$ است.

نقطه در حالت سه بعدی: در حالت دوعبدي عموماً می‌توان مقدار نقطه را می‌سب کرد و جهت چرخش آن را به کمک

قانون دست راست تعیین نمود. هر چند در حالت سه بعدی این امر پیچیده است.

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$$

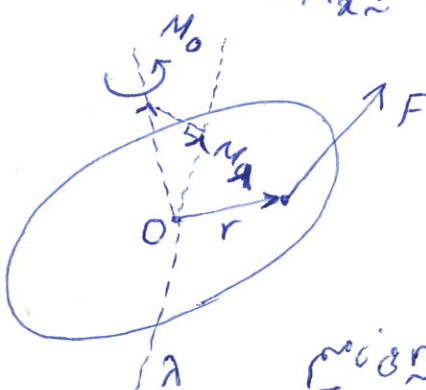
در حالت سه بعدی عموماً از تعریف برداری استفاده می‌نمود

می‌توان به صورت روبرو نیز نمایش داد

$$\underline{M}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{i}(yF_z - zF_y) - \underline{j}(xF_z - zF_x) + \underline{k}(xF_y - yF_x)$$

این سه مؤلفه نقطه و بردار وجود می‌آید

$$= M_x \underline{i} + M_y \underline{j} + M_z \underline{k}$$



در پاره‌ای از موارد لازم است که مقدار نیروی F

حول یک محور دخواه نذر از O است را بدست آورد در این صورت

بانی سب M_O و تصویر آن برداری بردار که نذر از O در راستای λ که می‌خواهیم

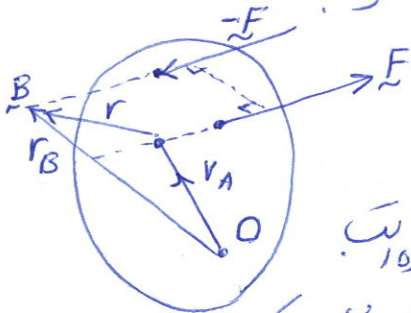
$$\underline{M}_A = (\underline{M}_O \cdot \underline{n}) \underline{n} = (\underline{r} \times \underline{F} \cdot \underline{n}) \underline{n}$$

$$\underline{n} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{k}, \quad \underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}, \quad \underline{r} = r_x \underline{i} + r_y \underline{j} + r_z \underline{k}$$

$$M_A = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

لازم به ذکر است که مقسّم وارثون که در حالت دو بعدی سطح شد در سه بعد نیز برقرار است.

مفهوم زوج نیرو که در حالت دو بعدی معنی شد، بر ایتی در حالت سه بعدی نیز قابل استفاده است.

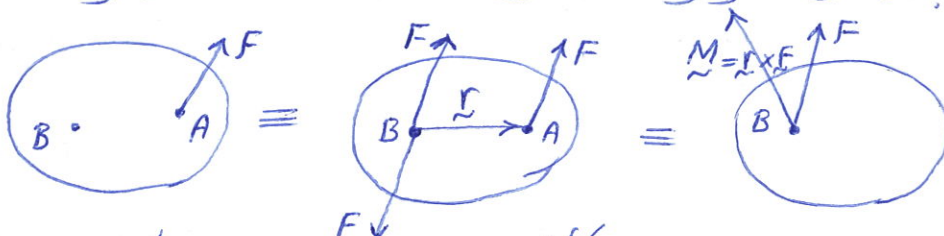


$$\underline{M}_O = \underline{r}_A \times \underline{F} + (\underline{r}_B \times (-\underline{F})) = (\underline{r}_A - \underline{r}_B) \times \underline{F} =$$

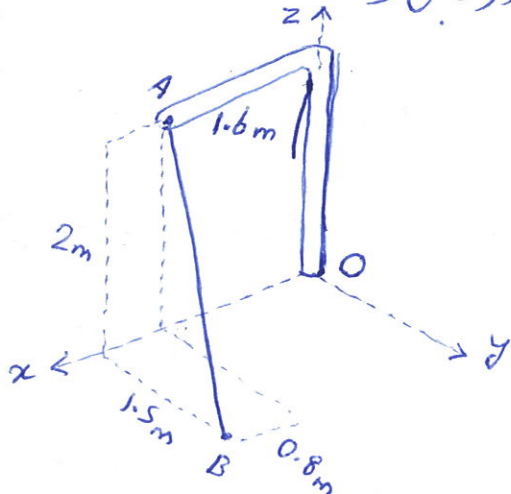
$$\underline{r} \times \underline{F} \quad M_O = Fd \quad \text{از بی ظانوان}$$

نسبتاً یک زوج نیرو یک بردار آزاد است و می‌تواند در یک نیروی بردار گرفته شود.

مثلاً با حالت دو بعدی می‌توان اثر یک نیرو را با یک نیروی مساوی در نقطه دیگر تعین کرد.



مثال: کسب در کابل AB برابر 2.4 kN است. نسبت در نیروی موجود در کابل را که در A اعمال می‌شود حول نقطه O



$$\underline{AB} = 0.8 \underline{i} + 1.5 \underline{j} - 2 \underline{k} \Rightarrow$$

$$\underline{n}_{AB} = \frac{0.8 \underline{i} + 1.5 \underline{j} - 2 \underline{k}}{\sqrt{0.64 + 2.25 + 4}} = 0.3047 \underline{i} + 0.5715 \underline{j} - 0.7619 \underline{k}$$

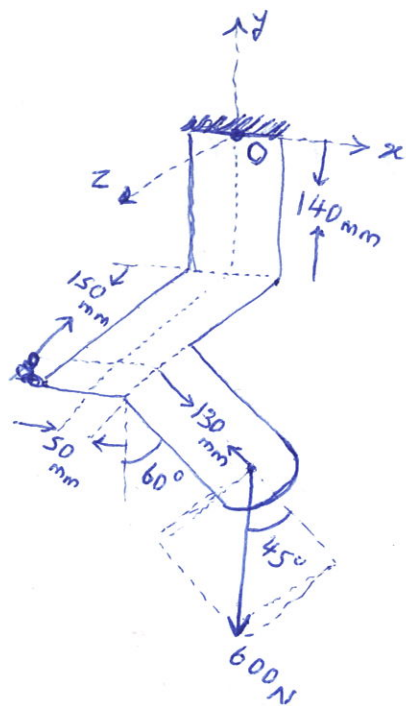
$$\Rightarrow \underline{T}_{AB} = 2.4 \underline{n}_{AB} = 0.731 \underline{i} + 1.371 \underline{j} - 1.829 \underline{k}$$

$$\underline{r} = 1.6 \underline{i} + 2 \underline{k}$$

$$\underline{M}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1.6 & 0 & 2 \\ 0.731 & 1.371 & -1.829 \end{vmatrix} = \underline{i} (0 - 2 \times 1.371) - \underline{j} (-1.6 \times 1.829 - 2 \times 0.731) + \underline{k} (1.6 \times 1.371 - 0) = -2.74 \underline{i} + 4.39 \underline{j} + 2.19 \underline{k}$$

$$\Rightarrow M_O = \sqrt{2.74^2 + 4.39^2 + 2.19^2} = 5.62 \text{ N.m}$$

(6)



مثال: ستورد نیروی نشان داده شده را حول نقطه O بیابید.

$$F_z = F \sin 45^\circ = 600 \frac{\sqrt{2}}{2} = 300\sqrt{2}$$

$$F_{xy} = F \cos 45^\circ = 600 \frac{\sqrt{2}}{2} = 300\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} F_x = F_{xy} \sin 60^\circ = 150\sqrt{6} \\ F_y = -F_{xy} \cos 60^\circ = -150\sqrt{2} \end{cases}$$

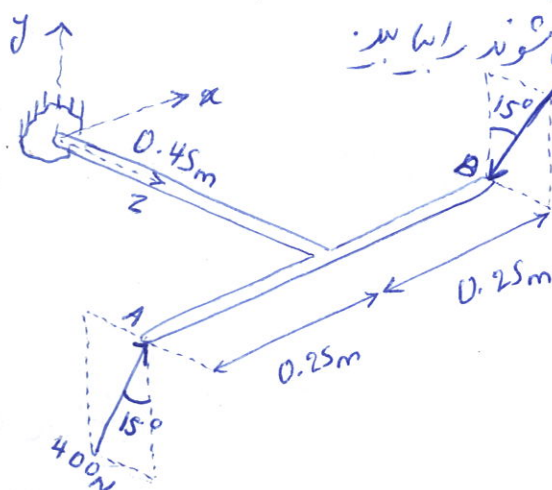
$$\underline{F} = 150\sqrt{6} \underline{i} - 150\sqrt{2} \underline{j} + 300\sqrt{2} \underline{k} =$$

$$367 \underline{i} - 212 \underline{j} + 424 \underline{k}$$

$$\underline{r} = -0.14 \underline{j} + 0.15 \underline{k} + 0.13 \sin 60^\circ \underline{i} - 0.13 \cos 60^\circ \underline{j} + 0.05 \underline{i}$$

$$\underline{r} = 0.1626 \underline{i} - 0.205 \underline{j} + 0.15 \underline{k}$$

$$\Rightarrow \underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0.1626 & -0.205 & 0.15 \\ 367 & -212 & 424 \end{vmatrix} = -55.2 \underline{i} - 13.89 \underline{j} + 40.77 \underline{k}$$



مثال: ستورد حاصل از دو نیروی 400 N که به نقطه T شکل مقابل اعمال می شوند را بیابید.

دو نیروی مقابل تشکیل یک زوج نیروی دهند پس ستورد

آنها حول همه نقاط یکسان است

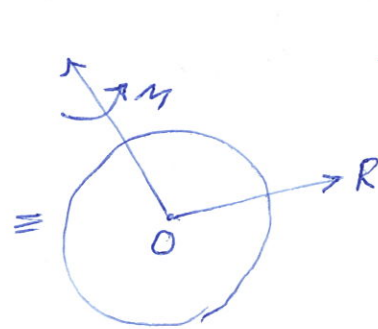
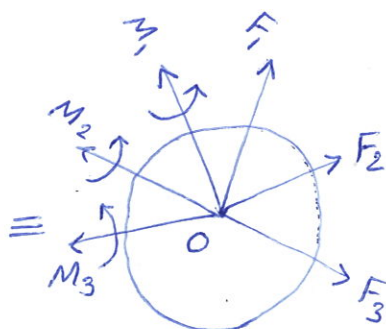
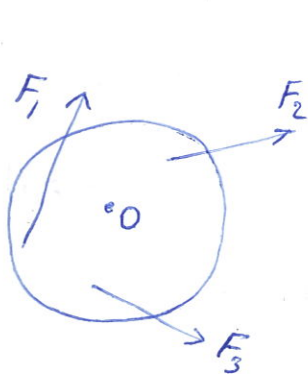
$$\underline{M}_B = \underline{r} \times \underline{F} = -0.5 \underline{i} \times [400 \sin 15^\circ \underline{k} + 400 \cos 15^\circ \underline{j}]$$

$$= 51.8 \underline{j} - 193.2 \underline{k}$$

می توان؟ صورت مولفه نیرو در نظر گرفت.

برآیند (نتیجه) Resultant: در حالت دو بعدی نشان دادیم که می توان برآیند بردارهای نیرو و ستورد

را به یک نقطه منتقل کرد و آنرا به یک بردار و ستورد جایگزین کرد. در سه بعد نیز می توان این انتقال و برآیند



را می توان داد

$$\underline{M}_i = \underline{r}_i \times \underline{F}_i \quad \text{و} \quad \underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 + \dots$$

که در رابطه بالا

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \dots$$

دقت کنیم که جهت و اندازه بردار $\underline{R}$ ربطی به نقطه O ندارد ولی اندازه و جهت بردار $\underline{M}$ تابع نقطه O است.

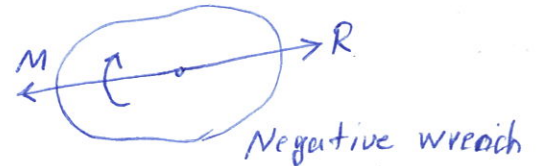
حالات خاص

(1) اگر تعداد نیرو به نقطه مشخصی وارد شوند تنها برآیند نیرویی آنرا در آن نقطه وجود دارد و ستاره‌ای وجود ندارد

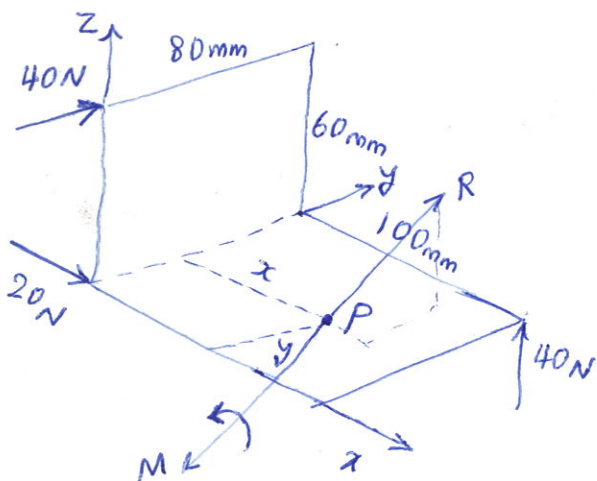
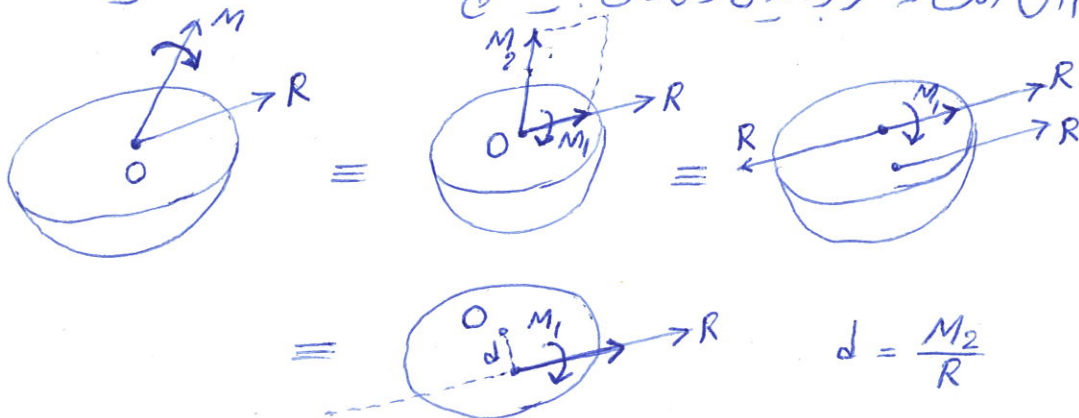
تواحد دانست

(2) چنانچه گسترده برآیند نیرویی برآیند موازی باشد در این حالت برآیند را wrench می‌نامیم.

اگر نیرو گسترده برآیند موازی باشد چنانچه راست در این صورت رنج راستی می‌گیریم.



نکته: به رسم آن است که هر برآیندی را می‌توان به یک رنج در خط اثر خاصی جایگزین کرد.



مثال: برآیند wrench سه نیروی زیر را بیابید

در محاسبات نقطه P که مختصات رنج از آن می‌گذرد را مشخص کنید.

$$\underline{R} = 20 \underline{i} + 40 \underline{j} + 40 \underline{k}$$

$$R = \sqrt{20^2 + 40^2 + 40^2} = \sqrt{3600} = 60 \text{ N}$$

$$M_P = (-x \underline{i} - y \underline{j}) \times 20 \underline{i} +$$

$$[(100-x) \underline{i} + (80-y) \underline{j}] \times 40 \underline{k} +$$

$$[-x \underline{i} - y \underline{j} + 60 \underline{k}] \times 40 \underline{j} =$$

$$20y \underline{k} - 40(100-x) \underline{j} + 40(80-y) \underline{i} - 40x \underline{k} - 2400 \underline{i} = (800-40y) \underline{i} + (-4000+40x) \underline{j} + (20y-40x) \underline{k}$$

بردار R و M باید همراه باشند

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j} + \frac{2}{3} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 800 - 40y = \frac{1}{3} M \\ 40x - 4000 = \frac{2}{3} M \\ 20y - 40x = \frac{2}{3} M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 800 - 40y = \frac{1}{3} M \\ 20y - 4000 = \frac{4}{3} M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7200 = 3M \Rightarrow M = -2400 \\ x = 60 \text{ mm}, y = 40 \text{ mm} \end{cases}$$

چون M منفی بدست آمده است پس negative wrench داریم

$$R = 20\vec{i} + 40\vec{j} + 40\vec{k}$$

$$M = -800\vec{i} - 1600\vec{j} - 1600\vec{k} \text{ (N.mm)}$$

فصل سوم: تعادل

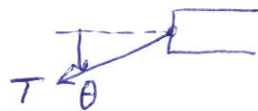
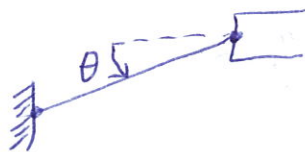
زمانی که جسمی در حالت تعادل است بر آن نیروی و گشت درونی و خارجی دارد و برابر است با صفر

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \quad , \quad M = \sum M = 0$$

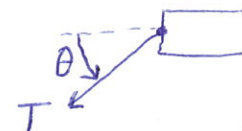
در واقعیت همه اجسام سه بعدی هستند ولی ما برای سادگی بعضی آنها را دو بعدی نیز در نظر می گیریم.

سیستم های دو بعدی: بهترین بخش در حل مسائل استاتیک رسم دیاگرام آزاد است. در دیاگرام آزاد کل جسم و یا بخشی از آن را جدا می کنیم و نیروهای وارد را آنالیز می کنیم.

کابل بدون اثر وزن



کابل با در نظر گرفتن وزن



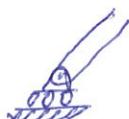
سطح منحنی smooth



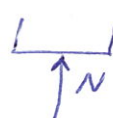
سطح زبر Rough



تکیه گاه غلتشی



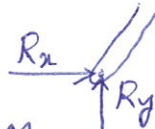
تکیه گاه غلتشی



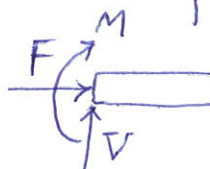
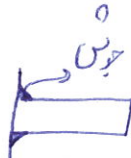
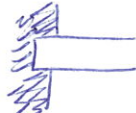
تکیه گاه لغزنده



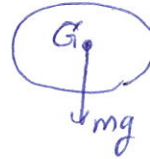
تکیه گاه سفت



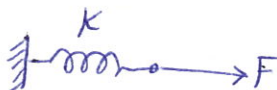
تکیه گاه لیردار



نیروی وزن



نیروی فنر



نیروی ترمزی



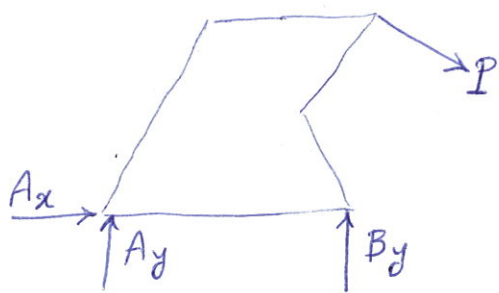
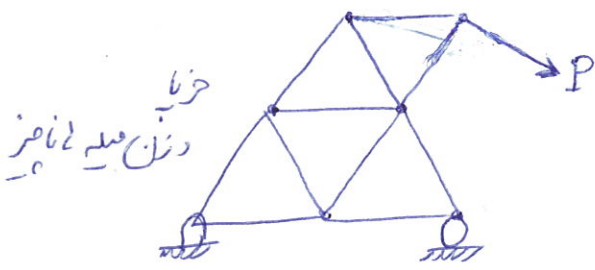
مراحل رسم دیاگرام آزاد

① تشخیص کرد سیستمی که باید تحلیل کرد. سیستم در معرض تحلیل باید مثل حداقل یک بخش مجزول باشد

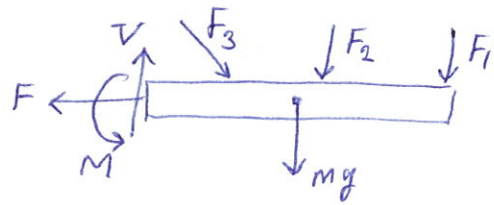
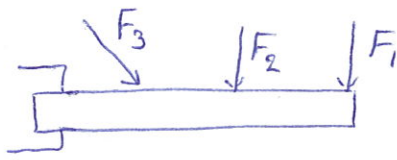
② نیروهای وارد بر سیستم را مشخص می کنیم. نیروهای خارجی و هم چنین نیروهای که به خاطر جدا کردن از دیگر اجزا

هستند را باید مشخص کنیم برای این کار باید برز جسم را مشخص کرد.

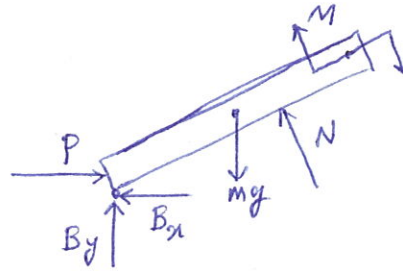
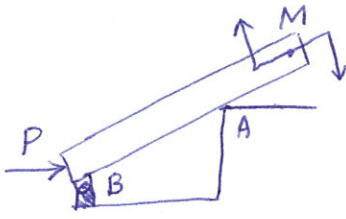
③ محوری مختصات مناسب انتخاب می کنیم



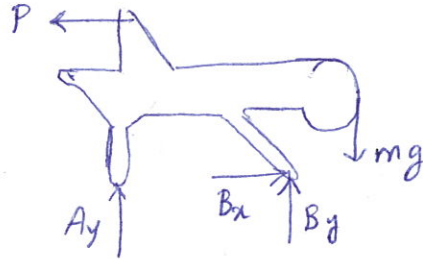
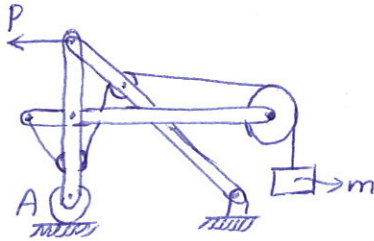
نیروی دایره‌ای
M



نیروی تماسی یا دیوار
توسط صاف



یک قاب یا جرم
نامر



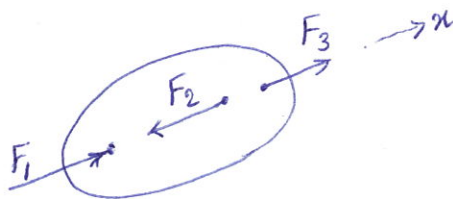
شرایط تعادل: در حالت دوعبوی شرایط تعادل به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_o = 0$$

که 0 یک نقطه دلخواه است.

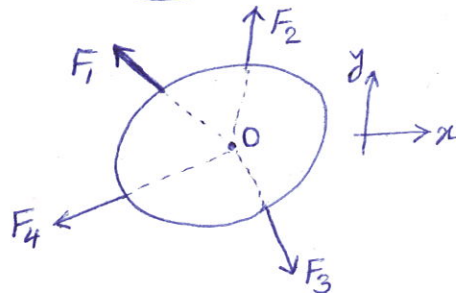
حالات خاص

نیروی روی یک خط



$$\sum F_x = 0$$

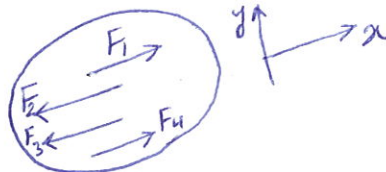
نیروی با خط از مرکز نقطه



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

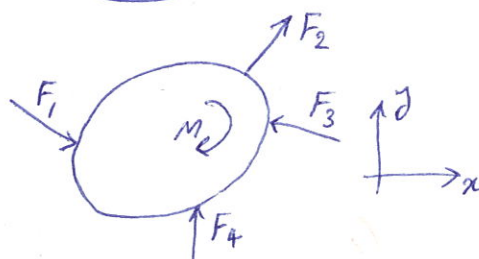
نیروی موازی



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

حالت کلی

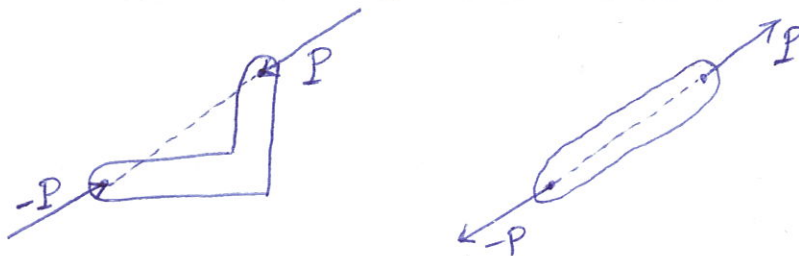


$$\sum F_x = 0$$

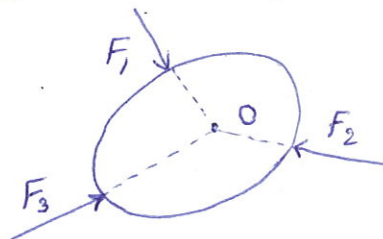
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

۱- اعضای دوتیرویی



اعضای سه تیرویی: اگر در نیرو و از یک نقطه بگذرند نیروی سوم نیز باید از آن نقطه بگذرد



لازمه: اگر بارهای از مواردی توان به عوض استفاده از سه رابطه تعادل گفته شده از سه معادله زیر استفاده کرد

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$

(خط AB عمود بر x نباشد)

همچنین در بارهای از مواردی توان از حالت زیر استفاده کرد

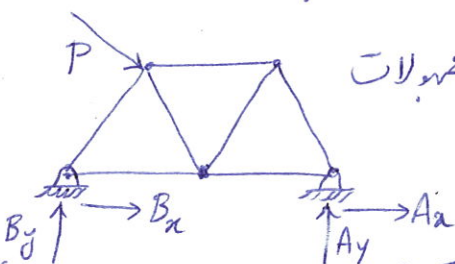
$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0$$

(روی یک خط باشند A, B و C)

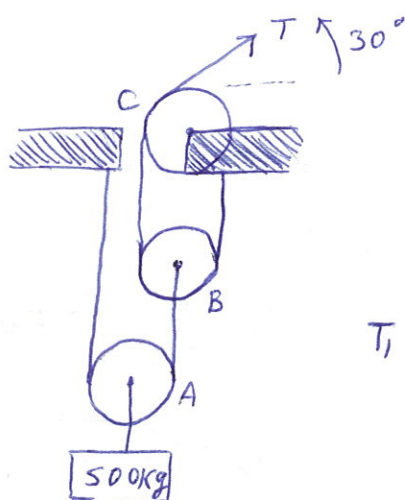
معین استاتیکی در تیر

در حالت تعادل درجه‌ای حداقل سه معادله داریم ولی این سه معادله لزوماً همه مجهولات ماده را مشخص نمی‌کند

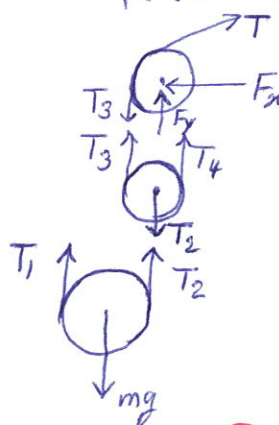
به عنوان مثال در خرابی شکل متقابل نمی‌توان به کمک سه معادله تعادل همه مجهولات را تعیین کرد.



درجه نامعین و وابسته به تعداد نیروهای خارجی نامعین و تعداد معادلات متقابل در این حالت سازه استاتیکی نامعین است اگر به کمک معادلات بتوان مجهولات نیروهای خارجی ماده را بدست آورد ماده معین استاتیکی است.



مثال: با صرف نظر از جرم قوره ۱ درخت کش در کابل که قوره A را به جرم 500kg نگه داشته است ببینید. ضمایم نیروی کابل در



یا تکان C را می‌توان گفت

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow T_1 r - T_2 r = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = \frac{1}{2} mg = \frac{1}{2} \times 9.81 \times 500 = 2452 \text{ N}$$

$$\sum M_{O'} = 0 \Rightarrow T_3 r' - T_4 r' = 0 \Rightarrow T_3 = T_4$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_3 + T_4 - T_2 = 0 \Rightarrow T_3 = T_4 = \frac{1}{2} T_2 = 1226 \text{ N}$$

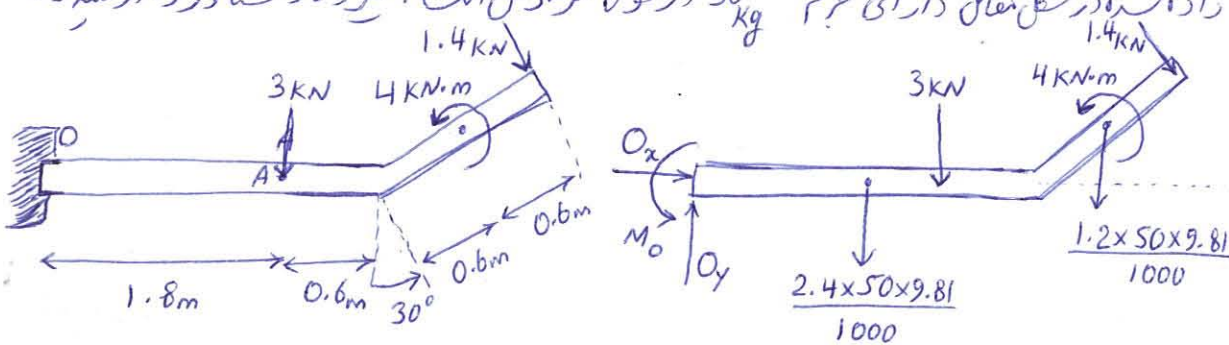
$$\sum M_{O''} = 0 \Rightarrow T - T_3 = 0 \Rightarrow T = 1226 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \cos 30^\circ - F_x = 0 \Rightarrow F_x = 1226 \cos 30^\circ = 1062 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1226 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T \sin 30^\circ + F_y - T = 0 \Rightarrow F_y = 1226 - 1226 \sin 30^\circ = 613 \text{ N}$$

مثال ۱: تیرتین را در شرایط مقابل دارای جرم 50 kg در طول هر متر است. نیروی وشت در راد را در تیر ۶ ب



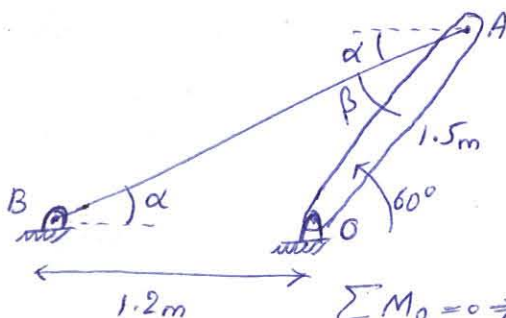
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow O_x + 1.4 \text{ kN} \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow O_x = -0.7 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow O_y - 3 \text{ kN} - 1.4 \cos 30^\circ - \frac{2.4 \times 50 \times 9.81}{1000} - \frac{1.2 \times 50 \times 9.81}{1000} = 0 \Rightarrow O_y = 5.98 \text{ N}$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M_O - \frac{2.4 \times 50 \times 9.81}{1000} \times 1.2 - 3 \times 1.8 - \frac{1.2 \times 50 \times 9.81}{1000} (2.4 + 0.6 \cos 30^\circ)$$

$$+ 4 - 1.4 (2.4 + 1.2 \cos 30^\circ) = 0 \Rightarrow M_O = 9.12 \text{ kN.m}$$

مثال ۲: تیر OA در موقعیت نشان داده شده است. کشش در کابل T و جهت واکنش نیروی وارده بر بین O را بیابید.



$$\tan \alpha = \frac{1.5 \sin 60^\circ}{1.2 + 1.5 \cos 60^\circ} = 0.666 \Rightarrow \alpha = 33.7^\circ$$

$$\beta = 180 - 120 - \alpha = 60 - \alpha = 26.3^\circ$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow T \sin \beta \cdot OA - mg \cdot \frac{1}{2} OA \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow T = \frac{mg \cos 60^\circ}{2 \sin \beta} = 99.5 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow O_x - T \cos \alpha = 0 \Rightarrow O_x = 99.5 \cos 33.7^\circ = 82.8 \text{ N}$$

$$\Rightarrow O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = 246.3 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow O_y - 18 \times 9.81 - T \sin \alpha = 0 \Rightarrow O_y = 232 \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{O_y}{O_x} = 2.80 \Rightarrow \theta = 70.3^\circ$$

سیستم های سه بعدی

در بخش قبلی روابط تعادل در حالت دو بعدی استخراج شد که معادله های آن سه معادله بود. در حالت سه بعدی

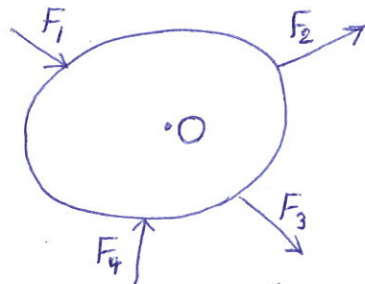
معادلات تعادل عبارتند از

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \text{ or } \sum F_z &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که برای آنکه یک جسم در یک نقطه حول سه محور را به یکدیگر متصل کنیم می توانیم آن را در یک نقطه حول یک نقطه را به یکدیگر متصل کنیم، و در آن صورت آن را به یکدیگر متصل می آوریم.

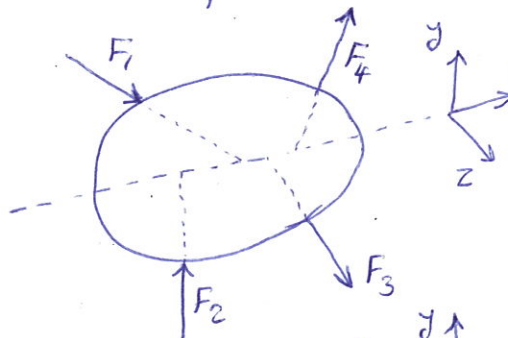
حالات خاص:

همه نیروها از یک نقطه عبور کنند



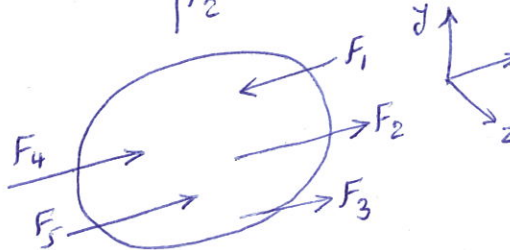
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned}$$

خطای نیروها روی یک خط قرار گیرند



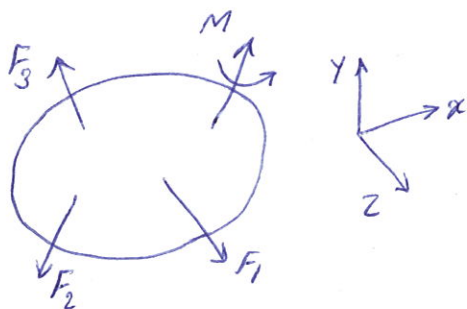
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned}$$

همه نیروها با هم موازی هستند



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

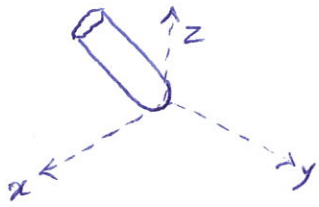
حالت کلی



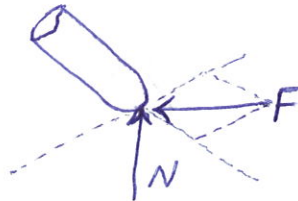
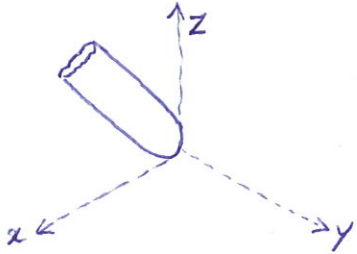
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

مثال به حالت دو بعدی در ابتدا باید دیاگرام آزاد نیرو را رسم کرد و بنابراین باید تماس چه مورد نظر باشد

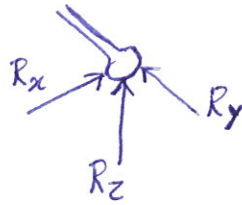
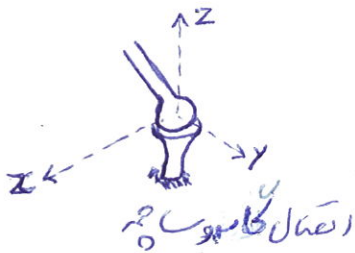
اطراف را جدا کرد



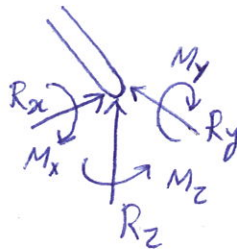
هم روی سطح صاف smooth



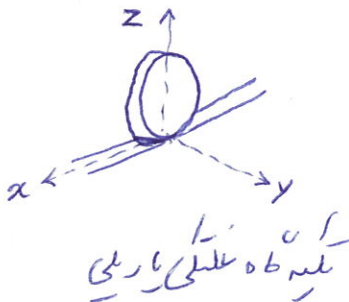
هم روی سطح زبر rough



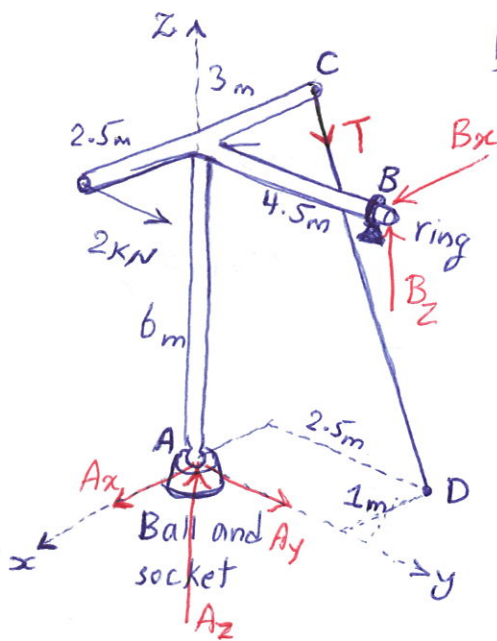
Ball and Socket



Fixed, welded



Roller or wheel



مثال: با صرف نظر از وزن سازه نیروی موجود در کابل CD و مولفه های آن را می سنجید. نیروی موجود در تکیه گاه A و B را نیز می سنجید.

حلی سیستم 3 بعدی است و شش معادله تعادل داریم. اگر محول خط

AB نسبت درگیریم 5 نیرو حذف می شود

$$\vec{AB} = 4.5\vec{j} + 6\vec{k} \Rightarrow n_{AB} = \frac{4.5\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{4.5^2 + 6^2}} = 0.6\vec{j} + 0.8\vec{k}$$

$$\vec{CD} = 2\vec{i} + 2.5\vec{j} - 6\vec{k} \Rightarrow n_{CD} = \frac{2\vec{i} + 2.5\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 2.5^2 + 6^2}} \Rightarrow$$

$$n_{CD} = 0.294\vec{i} + 0.368\vec{j} - 0.882\vec{k} \Rightarrow \vec{T} = T n_{CD} = T (0.294\vec{i} + 0.368\vec{j} - 0.882\vec{k})$$

$$\sum M_{AB} = 0 \Rightarrow [(-\vec{i} + 2.5\vec{j}) \times (0.294T\vec{i} + 0.368T\vec{j} - 0.882T\vec{k})] \cdot (0.6\vec{j} + 0.8\vec{k}) +$$

$$[(2.5\vec{i} + 6\vec{k}) \times 2\vec{j}] \cdot (0.6\vec{j} + 0.8\vec{k}) = 0 \Rightarrow$$

$$[-0.368T\vec{k} - 0.882T\vec{j} - 0.735T\vec{k} - 2.205T\vec{i}] \cdot (0.6\vec{j} + 0.8\vec{k}) +$$

$$[5\vec{k} - 12\vec{i}] \cdot (0.6\vec{j} + 0.8\vec{k}) = 0 \Rightarrow -0.6 \times 0.882T - 0.8(0.368 + 0.735)T + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$-1.4116T + 4 = 0 \Rightarrow T = 2.834 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = 2.834 \text{ kN} (0.294\vec{i} + 0.368\vec{j} - 0.882\vec{k}) = 0.833\vec{i} + 1.043\vec{j} - 2.500\vec{k}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow -4.5 B_x + 2 \times 2.5 - 1.043 \times 3 = 0 \Rightarrow B_x = 0.416 \text{ kN}$$

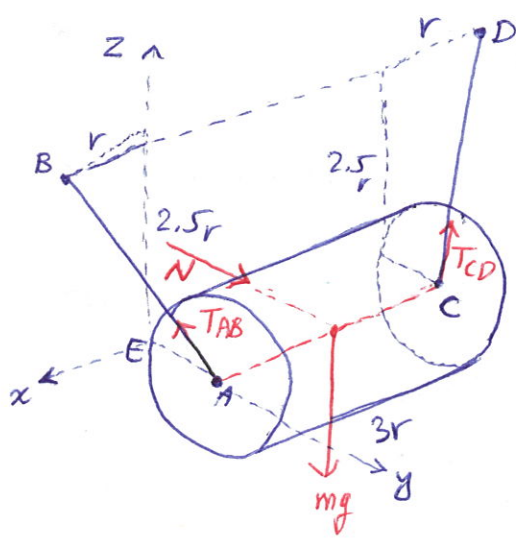
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -2 \times 6 + 4.5 B_z - 1.043 \times 6 = 0 \Rightarrow B_z = 4.057 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x + 0.833 = 0 \Rightarrow A_x = -1.249 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 2 + 1.043 = 0 \Rightarrow A_y = -3.043 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z + B_z - 2.5 = 0 \Rightarrow A_z = -1.557 \text{ kN}$$

سؤال: استوانه ای، جرم m توسط دو کابل به دیوار متصل شده است.
 است. کشش در هر کابل و نیروی عمودی سطح را بیابید.



$$\sum M_{BD} = 0 \Rightarrow r \times mg - N \times 2.5r = 0 \Rightarrow N = 0.4mg$$

$$\vec{AB} = r\vec{i} - r\vec{j} + 2.5r\vec{k} \Rightarrow \vec{n}_{AB} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2.5\vec{k}}{\sqrt{8.25}}$$

$$\vec{CD} = -r\vec{i} - r\vec{j} + 2.5r\vec{k} \Rightarrow \vec{n}_{CD} = \frac{-\vec{i} - \vec{j} + 2.5\vec{k}}{\sqrt{8.25}}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_{AB} = T_{AB} \left(\frac{\vec{i} - \vec{j} + 2.5\vec{k}}{\sqrt{8.25}} \right)$$

$$\vec{T}_{CD} = T_{CD} \left(\frac{-\vec{i} - \vec{j} + 2.5\vec{k}}{\sqrt{8.25}} \right)$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \left(\frac{T_{AB}}{\sqrt{8.25}} - \frac{T_{CD}}{\sqrt{8.25}} \right) \vec{i} + \left(N - \frac{T_{AB} + T_{CD}}{\sqrt{8.25}} \right) \vec{j} + \left(\frac{2.5T_{AB} + 2.5T_{CD}}{\sqrt{8.25}} - mg \right) \vec{k} = 0$$

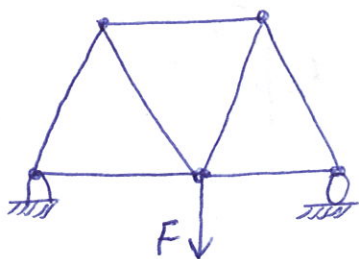
$$\Rightarrow T_{AB} = T_{CD} = T, \quad T = \sqrt{8.25} \times \frac{N}{2} = 0.2mg\sqrt{8.25} = 0.574mg$$

مقدار سوم خود به خودی قرار است.

فصل چهارم: سازه؟

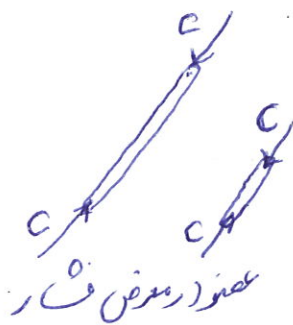
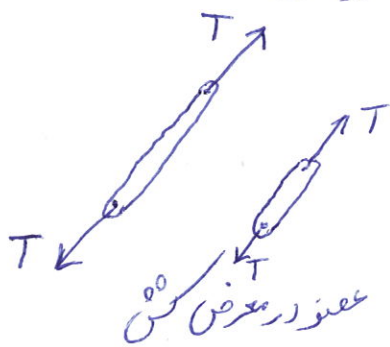
خرپای دوتایی (صحنه ای):

خرپای سازه ای هستند که از تعدادی عضو تشکیل شده اند که در آنها: یکدیگر متصل شده اند مانند سازه های زیر



صحنه ای همه اعضای خرپا در داخل یک صفحه باشند
خرپا دوتایی (صحنه ای) است.

برای حل مسائل خرپا باید نیرو در هر یک از اعضای خرپا باشیم. یکی از بهترین فرضیات در خرپا آن است که اعضای خرپا دوتایی هستند. هر عضو خرپا تنها در دو انتهای خود در معرض نیرو است. این دوتایی با هم مادی و در خلاف جهت هستند. هر عضو در معرض کشش و یا در معرض فشار است.



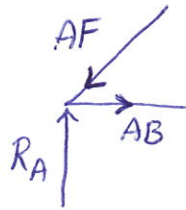
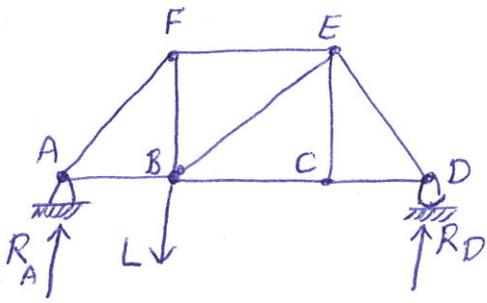
در تحلیل خرپا فرض می کنیم نیروها بر روی بین (داخل اتصال اعضا) اعمال می شود. اگر نیروی کشنده ای مانند وزن W به خرپا اعمال شود نمی توان آن یعنی $\frac{W}{2}$ را به هر یک منتقل می کنیم.

دوروش عمده برای تحلیل خرپا وجود دارد
روش Joint
روش section مقطع زدن

روش Joints: در این روش از نوشتن تعادل در هر یک از بین (Joints) استفاده می کنیم.

از میان سه معادله تعادل در صحنه تنها دو معادله به کار می آید و معادله $\sum M = 0$ در حذف می شود زیرا نیروها همگی از بین عبور می کنند و نسبت به نیروی حول بین یکجهتی نمی رود. (12)

برای تحلیل باید از پی شروع کرد که حداقل یک نیروی معلوم در آن وجود دارد و حداقل دو نیروی مجهول در اعضای آن حاضر است. عنوان مثال درختی زیر



AF در معرض فشار است
AB در معرض کشش است.

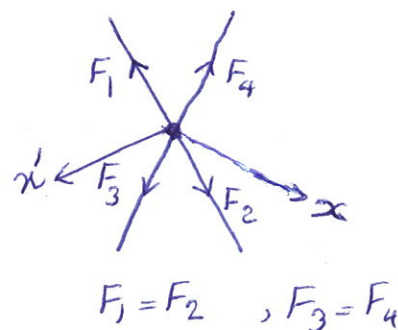
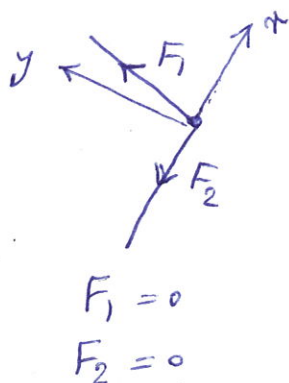
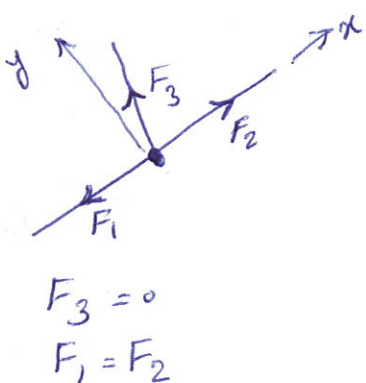
می توان ابتدا نیروهای تکیه گاهی را تعیین کرد. سپس در بین A تحلیل انجام دهیم چون تنها دو نیروی AF, AB مجهول هستند پس می توان پس F را تحلیل کرد زیرا تنها دو نیروی مجهول FE و BF وجود دارند در ادامه می توان بین های B, C, E, D را تحلیل کرد و کل نیروهای را تعیین کرد. در نهایت تحلیل بین D نیروی هم اخذ پیدا شد و می توان چک کرد که نیروها را درست محاسبه کرده ایم یا خیر. (از سه ذکر است که در بسیاری موارد ممکن است نیروی یک خرابی برابر صفر باشد مانند نیروی CE از خرابی بالا).

در یک خرابی که دارای ۲ پی است در مجموع می توان ۲ معادله نوشت. اگر خرابی دارای یک تکیه گاه عسلی و یک تکیه گاه پی باشد ۳ مجهول تکیه گاه دارد و اگر m عضو پی داشته باشد m معادله پیوسته باشد m معادله نیروی مجهول دارد و چنانچه $m+3=2$ ؛ شد خرابی از لحاظ استاتیکی معین است و می توان همه نیروهای را تعیین کرد

$m = 9$ $2 = 6$ ماله بالا

اگر $m+3 > 2$ ؛ باشد خرابی از لحاظ استاتیکی نامعین است
اگر $m+3 < 2$ ؛ شد خرابی ناپایدار است و در اثر اعمال بار فرو خواهد ریخت

حالات خاص



سؤال: نیروهای در اعضای CE, BF, BE, AF از ضلع بر حسب ...

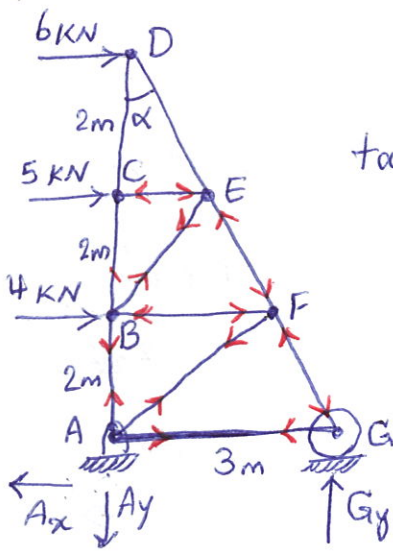
$$\tan \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan 0.5 = 26.6^\circ$$

حل: از سمت چپ کل ضرب

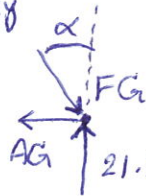
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + 4 + 5 + 6 = 0 \Rightarrow A_x = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6 \times 6 + 5 \times 4 + 4 \times 2 - 3G_y = 0 \Rightarrow G_y = \frac{64}{3} = 21.3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow G_y - A_y = 0 \Rightarrow A_y = 21.33 \text{ kN}$$



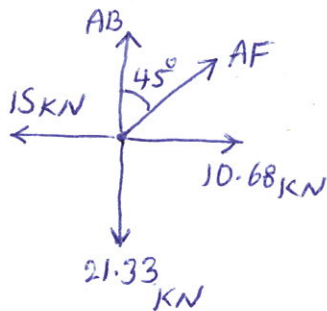
G, 0 Joint



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow FG \cos 26.6 - 21.33 = 0 \Rightarrow FG = \frac{21.33}{\cos 26.6} = 23.85 \text{ kN C}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -AG + FG \sin \alpha = 0 \Rightarrow AG = 23.85 \sin 26.6 = 10.68 \text{ kN T}$$

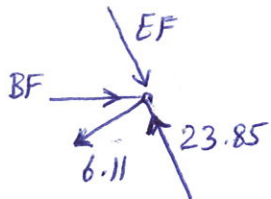
A, 0 Joint



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 10.68 + \frac{\sqrt{2}}{2} AF - 15 = 0 \Rightarrow AF = \frac{15 - 10.68}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6.11 \text{ kN T}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow AB + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6.11 - 21.33 = 0 \Rightarrow AB = 21.33 - 6.11 \frac{\sqrt{2}}{2} = 17.0 \text{ kN T}$$

F, 0 Joint



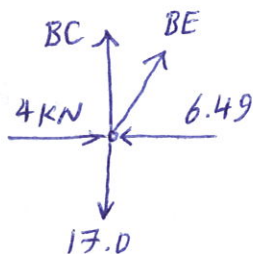
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 23.85 \cos 26.6 - EF \cos 26.6 - 6.11 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$EF = 23.85 - \frac{6.11}{\sqrt{2} \cos 26.6} = 19.01 \text{ kN C}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow BF - 6.11 \frac{\sqrt{2}}{2} - 23.85 \sin 26.6 + 19.01 \sin 26.6 = 0 \Rightarrow$$

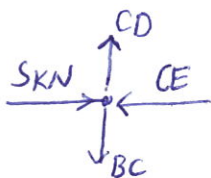
$$BF = 6.49 \text{ kN C}$$

B, 0 Joint

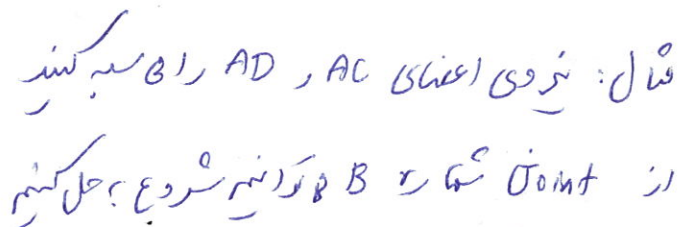


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow BE \sin 26.6 + 4 - 6.49 = 0 \Rightarrow BE = 5.56 \text{ kN T}$$

C, 0 Joint



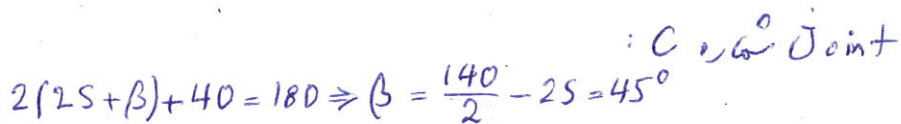
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow CE - 5 \text{ kN} = 0 \Rightarrow CE = 5 \text{ kN}$$



$$\overline{AC}^2 - 2.4(\sin 25^\circ + \cos 25^\circ) \overline{AC} + 1.44 = 0 \Rightarrow \overline{AC}^2 - 3.189 \overline{AC} + 1.44 = 0 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{3.189 \pm 2.100}{2} \Rightarrow$$

$$\tan \theta = \frac{0.545 \sin 25^\circ}{1.2 - 0.545 \cos 25^\circ} = 0.326 \Rightarrow \theta = 18.06^\circ$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow BC \cos \theta - AB = 0 \Rightarrow AB = 6.451 \cos 18.06 = 6.133 \text{ kN} \quad \text{--- T}$$



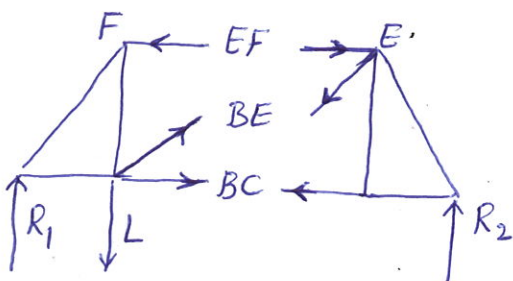
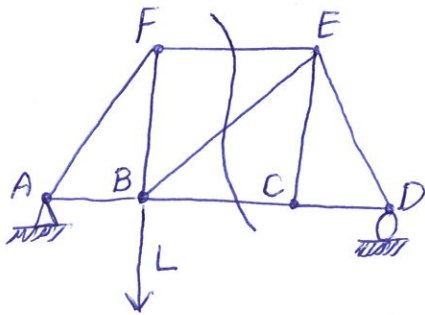
$$AC \sin 25^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} CD = 2$$

$$AC \cos 25^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} CD = -6.133$$

از محل رو موارد بالا

خوب دارای تکیه است و بنابراین $AD = 3.11 \text{ kN}$ C

روش مقطع: در روش قبل (روش مفصل اتصاف) دو معادله از سه معادله تعادل یک کار می‌آمد. در روش حاضر که روش مقطع نام دارد می‌توان از هر سه معادله در کنار هم استفاده کرد. با استفاده از این روش می‌توان نیرو در هر عضو از خراب را به طور مستقل و با در نظر گرفتن مقطعی از خرابی سبب کرد. بنابراین دیگر نیازی نیست که مفصل ۱، مفصل ۲، برای انتخاب یک مقطع باید وقت داشت مقطعی را انتخاب کنیم که پس از سه عضو محمول را نداشته باشد چون تنها سه معادله تعادل داریم.

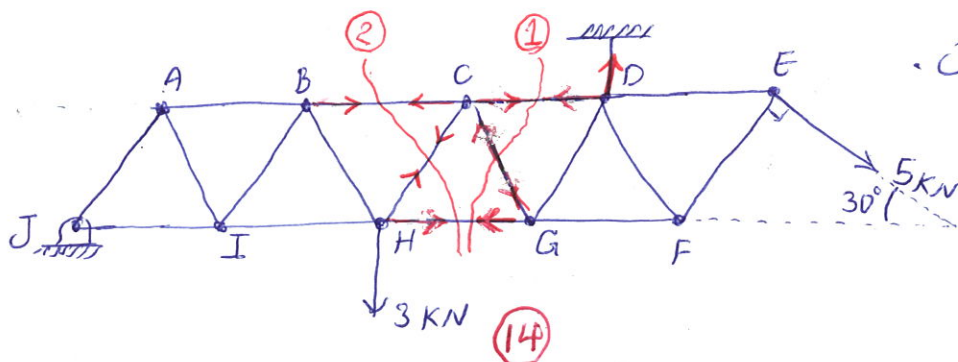


به عنوان مثال خرابی زیر را در نظر می‌گیریم. ابتدا با نوشتن تعادل برای یکی از خرابی‌ها (مثلاً برای خرابی سبب می‌کنیم) با در نظر گرفتن مقطع آن داده شده خرابی به دو قسمت تقسیم می‌شود. با در نظر گرفتن قسمت چپ خرابی و نسبت در حول نقطه B می‌توانیم که نیروی EF به چپ شکی است. با نوشتن دو تعادل دیگر می‌توان BC و BE را بدست آورد. می‌توانیم از قسمت راست است استفاده کنیم.

مثلاً با نوشتن در گرفتن حول B می‌توان EF را می‌سبب کرد و با نوشتن در گرفتن حول E، BC را

لازم به ذکر است که در روش مقطع و مفصل را می‌توان هم ترکیب کرد. به عنوان مثال با نوشتن تعادل در مفصل B پس از مقطع زدن نیروهای BF و AB را بدست آورد. در روش مقطع باید سعی کنیم محاوره حول نقطه‌ای که در بری کنیم که کمترین مجهولات حذف شوند.

مثال: برای خرابی نشان داده شده نیرو در اعضای BC، CD، و CG می‌سبب شود. خرابی از جمله این به طول



8m کشیده است.

از تکیه دال کل خراب

$$\sum M_j = 0 \Rightarrow 3 \times 16 + 5 \cos 60^\circ \times 48 - F_D \times 28 = 0 \Rightarrow$$

$$48 + 120 - 28 F_D = 0 \Rightarrow F_D = 6 \text{ N}$$

در نظر گرفتن مقطع شماره I:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 5 \cos 60^\circ \times 24 - CD \times 8 \sin 60^\circ - F_D \times 8 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow$$

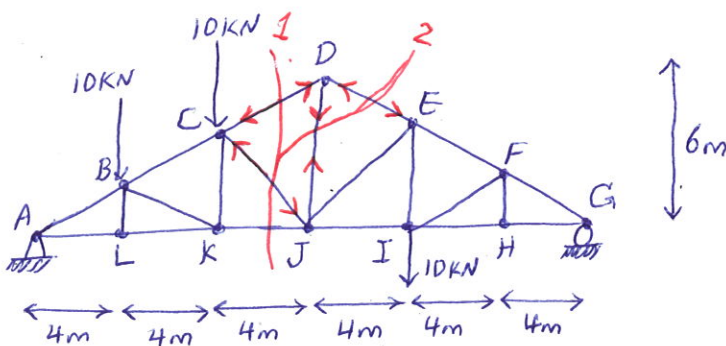
$$CD = \frac{60 - 24}{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{36}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \text{ N (T)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +F_D - 5 \cos 60^\circ - CG \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow CG = \frac{6 - 2.5}{\sqrt{3}/2} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ (C)}$$

در نظر گرفتن مقطع شماره II:

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow -F_D \times 12 + 5 \cos 60^\circ \times 32 - BC \sin 60^\circ \times 8 = 0 \Rightarrow$$

$$BC = \frac{80 - 72}{4\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (T)}$$



شکل) نیرو در عضو DJ را می بینیم

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 10 \times 16 + 10 \times 20 + 10 \times 8 - F_A \times 24 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{440}{24} = 18.33 \text{ kN}$$

جمع مقطعی همزمان با تکیه دال DJ با سرتیغ نزدیک باشد.

ابتدا مقطع گنگی 1 را در نظر می گیریم

$$\sum M_j = 0 \Rightarrow F_A \times 12 - CD \times 6 \cos \alpha - 10 \times 4 - 10 \times 8 = 0 \Rightarrow$$

$$CD = \frac{-120 + 18.33 \times 12}{6 \times \frac{12}{\sqrt{144+36}}} \Rightarrow CD = 18.626 \text{ kN (C)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \times 4 + 10 \times 8 - \frac{\sqrt{2}}{2} CJ \times 12 = 0 \Rightarrow CJ = \frac{120}{6\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} = 14.14 \text{ kN (C)}$$

حال: سراغ مقطع شماره 2 می رویم (تکیه دال چپ تحلیل می شود)

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 18.33 \times 24 - 10 \times 20 - 10 \times 16 - 12 DJ + 14.14 \frac{\sqrt{2}}{2} \times 12 = 0 \Rightarrow$$

$$DJ = \frac{440 - 200 - 160 + 120}{12} = 16.67 \text{ kN (T)}$$

تألیف و ماشین (Frames & Machines)

یکی از سازه‌های قاب یا ماشین (Frame) می‌تواند از دو نوعی باشد (در اینجا به اعضا دوتایی
حتمی)

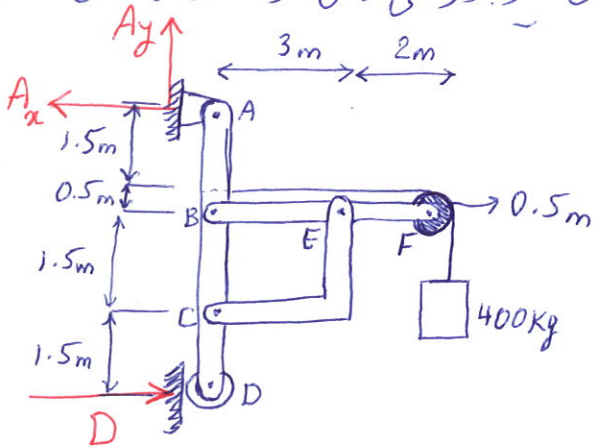
قاب: سازه‌ای است که برای تحمل نیروی طراحی می‌شود و معمولاً ثابت است.

ماشین: سازه‌ای است که معمولاً اعضای متحرک دارد و برای انتقال نیرو یا تبدیل آن طراحی شده است.

لازم به ذکر است که برخلاف قاب، در ماشین نیروها در راستای اعضا نیستند.

در این فصل تنها بر روی قاب و ماشین دو عددی متمرکز می‌شویم. اعضای قاب و ماشین اغلب تحت تغییر شکل آسان قرار می‌گیرند.

می‌تواند در تحلیل قاب و ماشین باید هر جزء به تنهایی تحلیل شود و اثر اجزای دیگر درستی اعمال شود. اثر عمل و عکس العمل
نیروها و جهت آن‌ها رعایت شود.



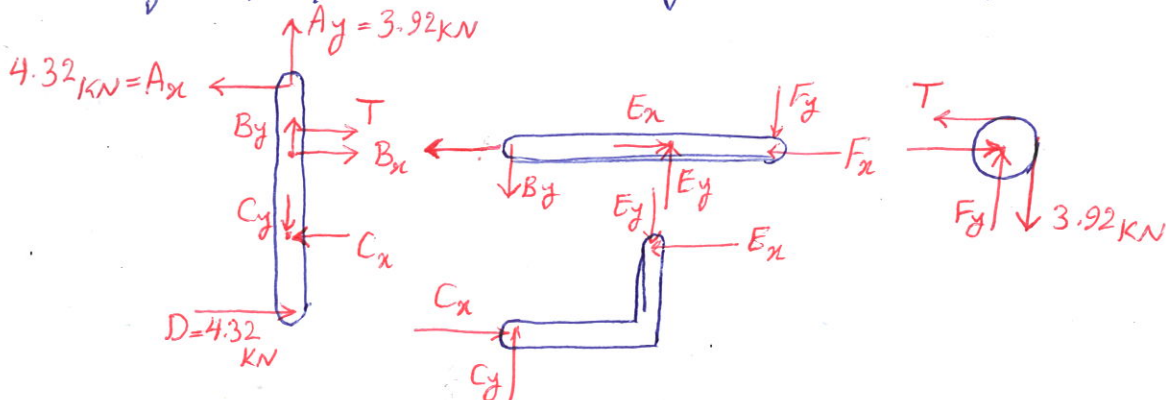
مثال: قاب نشان داده شده برای تحمل نیروی 400kg
بکار رفته است. نیرو در همه اعضا را بیابید.

حل: از تعادل کل قاب

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 400 \times 9.81 \times 5.5 - D \times 5 = 0 \Rightarrow D = 4316.4 \text{ N} = 4.32 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - D = 0 \Rightarrow A_x = 4.32 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 400 \times 9.81 = 0 \Rightarrow A_y = 3924 \text{ N} = 3.92 \text{ kN}$$



$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 3.92 \times 0.5 - T \times 0.5 = 0 \Rightarrow T = 3.92 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x - T = 0 \Rightarrow F_x = 3.92 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y - 3.92 = 0 \Rightarrow F_y = 3.92 \text{ kN} \quad (15)$$

برای تفرقه:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_y \times 5 - E_y \times 3 = 0 \Rightarrow E_y = \frac{5}{3} \times 3.92 = 6.53 \text{ kN}$$

برای عضو BF:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_y \times 2 - B_y \times 3 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{2}{3} \times 3.92 = 2.62 \text{ kN}$$

دو نیروی دیگر که افعی هستند می‌تواند

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow E_y \times 3 - E_x \times 1.5 = 0 \Rightarrow E_x = 2E_y = 13.08 \text{ kN}$$

عضو CE:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x - E_x = 0 \Rightarrow C_x = 13.08 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - E_y = 0 \Rightarrow C_y = 6.53 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + F_x - E_x = 0 \Rightarrow B_x = 13.08 - 3.92 = 9.15 \text{ kN}$$

عضو BF با زنی در هم:

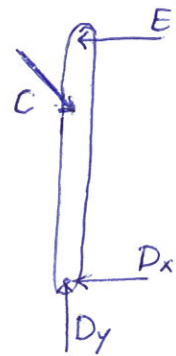
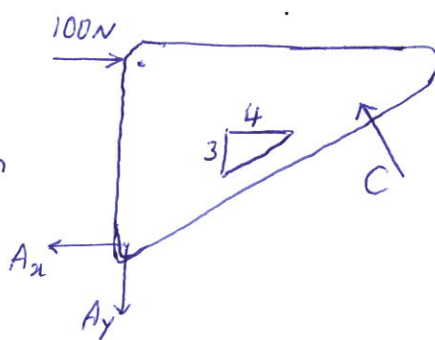
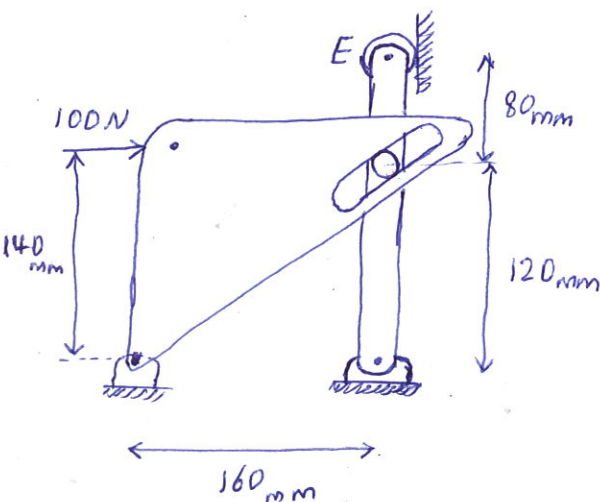
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 3.92 \times 2 + 9.15 \times 1.5 - 4.32 \times 3.5 - 4.32 \times 1.5 = 0$$

عضو AD:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + D_x + B_x - C_x + F = 0 \Rightarrow -4.32 + 4.32 + 9.15 + 3.92 - 13.08 = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - C_y = 0 \Rightarrow 3.92 + 2.62 - 6.53 = 0 \quad \checkmark$$

مثال: با ملاحظه از وزن اعضای قاب نیروها در بین D را می‌توانید



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 100 \times 140 - C \sqrt{120^2 + 160^2} = 0 \Rightarrow 14000 - 200C = 0 \Rightarrow C = 70 \text{ N}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow D_x \times 200 - C \times \frac{3}{5} \times 80 = 0 \Rightarrow D_x = \frac{240}{5 \times 200} \times 70 = 16.8 \text{ N}$$

در مصلح:

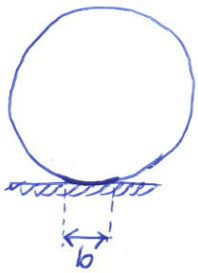
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y - \frac{4}{5}C = 0 \Rightarrow D_y = \frac{4}{5} \times 70 \Rightarrow D_y = 56 \text{ N}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{16.8^2 + 56^2} = 58.5 \text{ N}$$

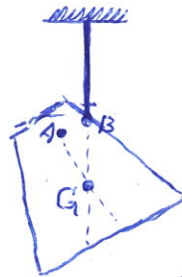
فصل پنجم: نیروهای گسسته

تا اینجا بدون در نظر گرفتن نیروی وزن همه چیز را مستقر کردیم. ولی در واقعیت هیچ نیروی مستقر نیست.

به عنوان مثال تماس یک تیر با چاره. اگر اجسام تماس در تماس با یکدیگر کوچکتر باشند می توان نیروی را به عنوان نیروی گسسته در نظر گرفت.

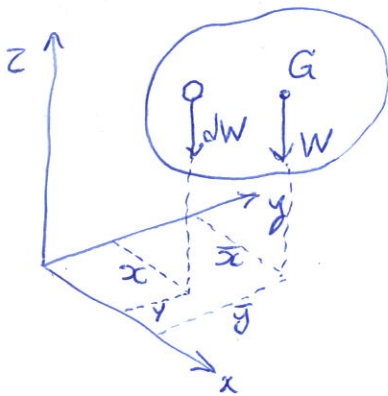


نیروی گسسته:
 - خطی: مانند نیروی وارد از جسم آویزان به کابل
 - سطحی: مانند فشاری از سیال روی یک دیوار
 - نقطه‌ای: مانند نیروی وزن (نیروی بدنی)
 - نیروی سطحی سیال روی جامد
 - نیروی سطحی جامد روی جامد



مرکز گرانش: جایی که جرم را از نقطه ای آویزان کنیم. وزن هم دقیقاً در زیر آن عمل خواهد بود.
 اگر نقطه اتصال را عوض کنیم جرم به شکل قرار می گیرد.
 که مرکز گرانش زیر قطب باشد از چیل تلاقی دو خط فرضی می توان مرکز گرانش را محاسبه کرد.

برای محاسبه مرکز گرانش به صورت زیر عمل می کنیم
 از برای قرار دادن گسسته:



$$\sum M_x : \int x dW = \bar{x} W$$

$$\sum M_y : \int y dW = \bar{y} W$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dW}{W}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dW}{W}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dm}{M}$$

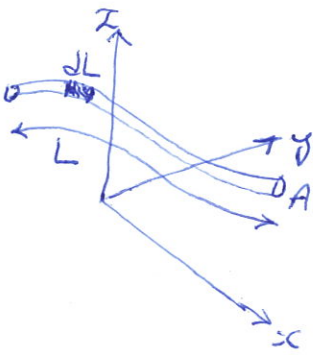
$$\bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV}$$

روابط بالا همان مرکز گرانش یا مرکز جرم هستند

محور لاریسائل چنانچه ثابت است



$$dm = \rho A dL$$

$$M = \rho A L$$

الف) سائل خطی

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dL}{L}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$

$$dm = \rho t dA$$

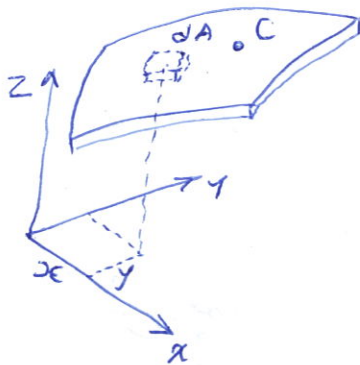
$$M = \rho t A$$

ب) سائل سطحی

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$



$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dV}{V}$$

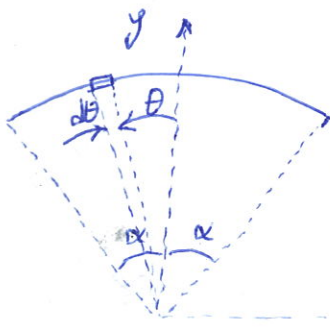
$$\bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

ج) در سائل حجمی

از روشی که این لاریسائل باید برای سبب (نقطه) استفاده کنیم

لازم: ذکر است چنانچه حجم دارای سطح یا محور تقارن؛ شش مرکز جرم بر روی آن سطح (محور) خواهد بود

مثال: محضات مرکز جرم یک آرک مطابق شکل با زاویه 2α



د شعاع r را ببینید

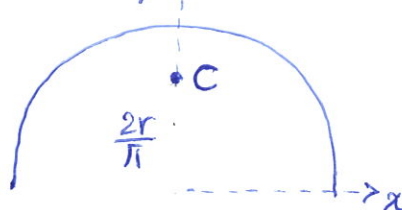
حل: محور را مطابق شکل انتخاب می کنیم در این صورت محور y

محور تقارن است پس $\bar{x} = 0$

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int y dL = \frac{1}{2r\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} r \cos \theta \cdot r d\theta = \frac{r^2}{2r\alpha} \sin \theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r^2}{2r\alpha} \cdot 2 \sin \alpha = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int x dL = \frac{1}{2r\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} r \sin \theta r d\theta = \frac{r^2}{2r\alpha} (-\cos \theta) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{-r^2}{2r\alpha} (\cos \alpha - \cos \alpha) = 0$$

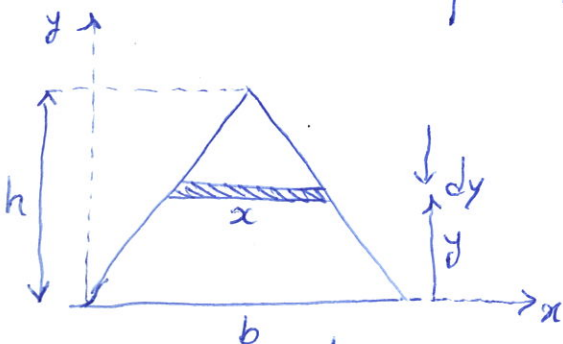
در حالت خاص $2\alpha = \pi$



مثال: محضات مرکز ارتفاع مثلث در در را ببینید

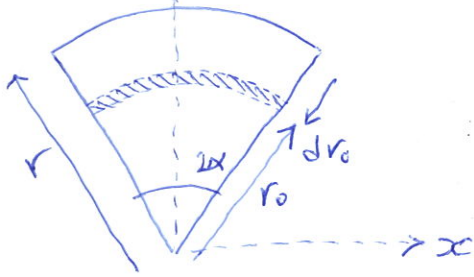
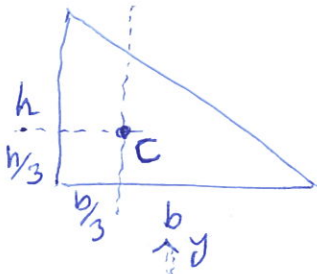
$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int y \cdot x dy}{\frac{1}{2}bh} =$$

$$x = \frac{b}{h} (h-y) \quad \text{و} \quad \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$



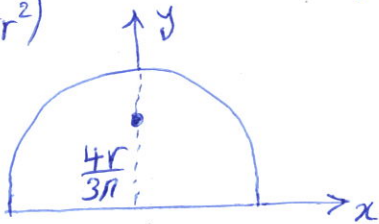
$$\bar{y} = \frac{2}{bh} \int_0^h y \cdot \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{2}{h^2} \int_0^h y (h-y) dy = \frac{2}{h^2} \left[h \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^h = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{6} = \frac{1}{3} h$$

رابطه بالا برای فاصله از هر کدام از محورهای برقرار است



$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int_0^r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot (2\alpha r_0 dr_0)}{\frac{\alpha}{\pi} (\pi r^2)} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \alpha \int_0^r r_0^2 dr_0}{\alpha r^2} = 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha r^2} \cdot \frac{1}{3} r^3 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$



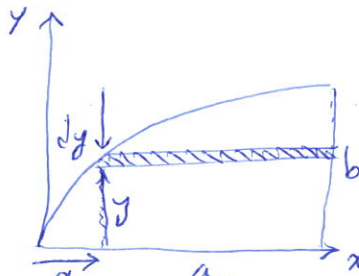
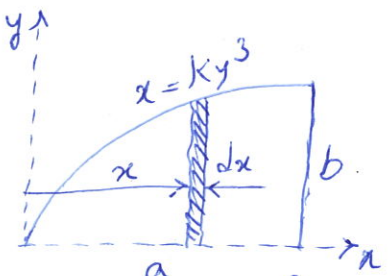
محل: مرکز سطح قطاع مقابل رابطه

محورهای ارتباطی شکل انتی ب کسم تا $\bar{x} = 0$

این رابطاتی شکل در نظریه

برای حالت $2\alpha = \pi$ داریم

محل: مرکز سطح مقابل رابط



$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int x dA = \frac{\int x y dx}{\int y dx} = \frac{\int_0^a x \left(\frac{x}{k}\right)^{1/3} dx}{\int_0^a \left(\frac{x}{k}\right)^{1/3} dx} = \frac{\int_0^a x^{4/3} dx}{\int_0^a x^{1/3} dx} = \frac{\frac{3}{7} x^{7/3} \Big|_0^a}{\frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^a} = \frac{\frac{3}{7} a^{7/3}}{\frac{3}{4} a^{4/3}} = \frac{4}{7} a$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{\int (a-x) y dy}{\int (a-x) dy} = \frac{\int_0^b (a-ky^3) y dy}{\int_0^b (a-ky^3) dy} = \frac{\left(\frac{1}{2} ay^2 - \frac{1}{5} ky^5\right) \Big|_0^b}{\left(ay - \frac{1}{4} ky^4\right) \Big|_0^b} = \frac{\frac{1}{2} ab^2 - \frac{1}{5} kb^5}{ab - \frac{1}{4} kb^4} \Rightarrow$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} ab^2 - \frac{1}{5} kb^5}{ab - \frac{1}{4} kb^4} = \frac{\frac{3}{10} ab^2}{\frac{3}{4} ab} = \frac{2}{5} b$$

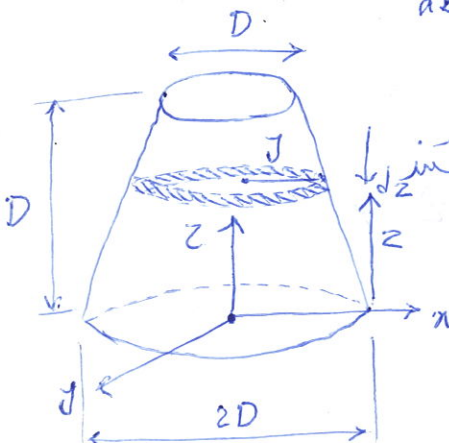
محل: مختصات مرکز جرم مخروط ناقص زیر رابط

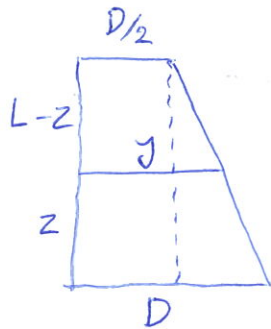
محورهای مختصات رابطاتی شکل انتی ب کسم میات x_2 و y_2 مختصات مرکز جرم

بنابراین $\bar{y} = \bar{x} = 0$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \int z dV = \frac{\int z dV}{\int dV}$$

$$dV = \pi y^2 dz$$





$$\frac{D - D/2}{L} = \frac{y - D/2}{L - z} \Rightarrow \frac{D}{2L}(L - z) = y - \frac{D}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{D}{2} + \frac{D}{2} - \frac{D}{2L}z = D - \frac{D}{2L}z \Rightarrow$$

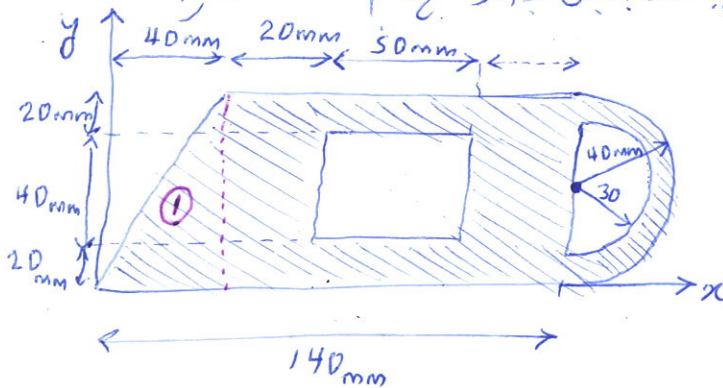
$$\bar{z} = \frac{\pi \int_0^L z (D - \frac{D}{2L}z)^2 dz}{\pi \int_0^L (D - \frac{D}{2L}z)^2 dz} = \frac{\int_0^L z (1 - \frac{z}{2L})^2 dz}{\int_0^L (1 - \frac{z}{2L})^2 dz} =$$

$$\frac{\int_0^L (z - \frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{4L^2}) dz}{\int_0^L (1 - \frac{z}{L} + \frac{z^2}{4L^2}) dz} = \frac{\frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{3}L^2 + \frac{1}{16}L^2}{L - \frac{1}{2}L + \frac{1}{12}L} = \frac{(24-16+3)\frac{L^2}{48}}{(12-6+1)\frac{L^2}{12}} = \frac{11}{28}L$$

نقطه مرکز جرم اجسام مرکب، چنانچه این جسم از ترکیب چند جسم $m_1, m_2, \dots$ تشکیل شده باشد مرکز جرم آنرا $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ باشد مرکز جرم شکل حاصل برابر است با

$$\bar{X} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

شکل مرکب از آرایه می شود. اگر شکل سطحی را جمع باشد بدین جری جرم از سطح استفاده می کنیم



شکل: محاسبات مرکز جرم شکل زیر را بسازید.

برای شکل 4: $\bar{x} = 140 + \frac{4(40)}{3\pi} = 156.98$

برای شکل 5: $\bar{x} = 140 + \frac{4(30)}{3\pi} = 152.73$

برای شکل 4: $A = \frac{\pi}{2}(40)^2 = 2513.27$

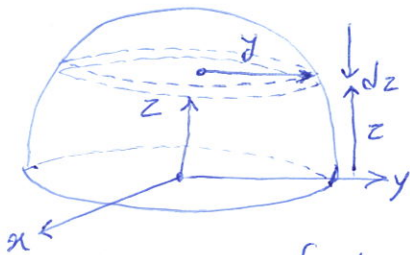
برای شکل 5: $A = \frac{\pi}{2}(30)^2 = 1413.72$

Part	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$A (mm^2)$	$A\bar{x} (mm^3)$	$A\bar{y} (mm^3)$
①	26.67mm	26.67mm	1600	42666.7	42666.7
②	90mm	40mm	8000	720000	320000
③	85mm	40mm	-2000	-170000	-80000
④	156.98mm	40mm	2513.27	394533.8	100530.8
⑤	152.73mm	40mm	-1413.72	-215917.45	-56548.8
			$\Sigma A = 8699.55$	$\Sigma A\bar{x} = 771283.05$	$\Sigma A\bar{y} = 326648.7$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A} = \frac{771283.05}{8699.55} = 88.65 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{326648.7}{8699.55} = 37.55 \text{ mm}$$

مثال: انتگرال‌های مرکز جرم نیم کره را بیابید

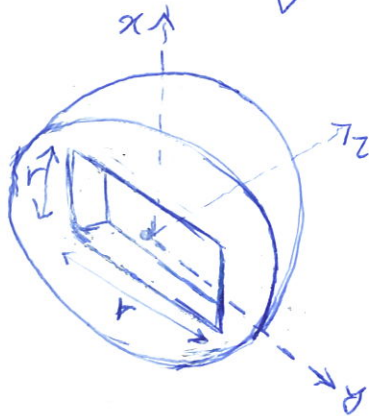


محورهای ارتباطی مثل آن است که در این صورت چون منبسط x و y

منبسط قرار می‌دهند $\bar{x} = \bar{y} = 0$ تنها کافی است $\bar{z}$ را بیابیم

$$\bar{z} = \frac{\int z dV}{V} = \frac{\int z \cdot \pi y^2 dz}{\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)} = \frac{\pi \int_0^R z (R^2 - z^2) dz}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{\pi \left[\frac{1}{2} R^2 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_0^R}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

با اِزای می‌توانیم از $\bar{z}$ مقدار مرکز جرم شکل رو به کار ببریم می‌تواند



Part	$\bar{z}$	V	$\bar{z}V$
①	$\frac{3R}{8}$	$\frac{2}{3} \pi R^3$	$\frac{\pi}{4} R^4$
②	$\frac{h}{2}$	$-\pi R^2 h$	$-\frac{1}{2} \pi R^2 h^2$

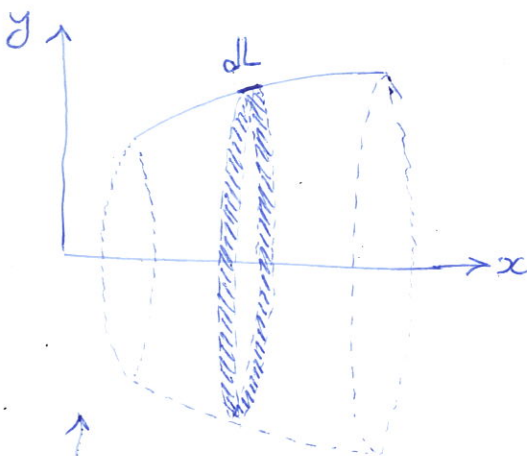
$$\bar{z} = \frac{\sum \bar{z}V}{\sum V} = \frac{\frac{\pi}{4} R^4 - \frac{1}{2} \pi R^2 h^2}{\frac{2}{3} \pi R^3 - \pi R^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} R^2 - \frac{1}{2} h^2}{\frac{2}{3} \pi R - h}$$

$$\frac{d\bar{z}}{dh} = 0 \Rightarrow -h \left(\frac{2}{3} \pi R - h \right) + \frac{\pi}{4} R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} h^2 - \frac{2}{3} \pi h R + \frac{\pi}{4} R^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} \pi x + \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \pi \pm \sqrt{\frac{4}{9} \pi^2 - \frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$x = 2.094 \pm 1.678 \Rightarrow x = 0.416 \Rightarrow h = 0.416 R$$

تصویر پایینی: این تصویر روشی ساده برای بیابان سطح حاصل از دوران یک منحنی در $\bar{y}$ جهت $\bar{y}$ است.



حالت اول: سطح حاصل از دوران یک منحنی

$$dA = 2\pi y dy \Rightarrow A = 2\pi \int y dy = 2\pi \bar{y} L$$

که $\bar{y}$ فاصله مرکز جرم منحنی از محور دوران است (نکته: اگر دوران به عرض

$$A = \theta \bar{y} L \quad 360^\circ \text{، اندازه } \theta \text{ باشد}$$

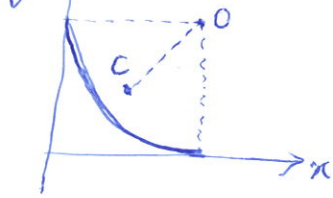
حالت دوم: حجم حاصل از دوران یک سطح

$$dV = 2\pi y dA \Rightarrow V = 2\pi \int y dA = 2\pi \bar{y} A$$

در رابطه بالا $\bar{y}$ فاصله مرکز سطح از محور دوران است.

$$V = \theta \bar{y} A \quad 360^\circ \text{، اندازه } \theta \text{ باشد} \quad (18)$$

مثال: معطالیت بی‌سره سطح جانبی که از دوران منحنی نشان داده شده حول محور x بدست می‌آید.



$$A = 2\pi \bar{y} L$$

حل: با استفاده از قضیه پاپوس

که $L = \frac{\pi}{2} r$ است برای منحنی $\bar{y}$ داریم.

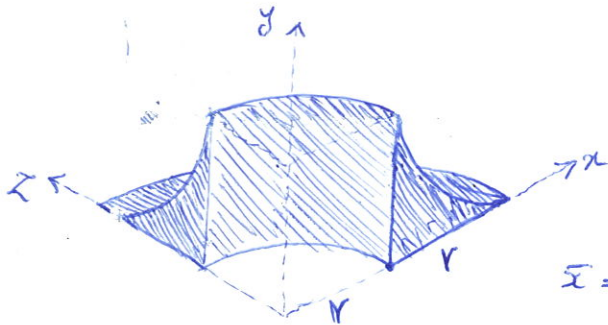
$$OC = r \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{r\sqrt{2}/2}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r \Rightarrow \bar{y} = r - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r = r - \frac{2}{\pi} r \Rightarrow$$

$$A = 2\pi r \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{\pi}{2} r = \pi r^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \pi r^2 (\pi - 2)$$

مثال: معطالیت حجم حاصل از دوران از مساحت زرد رنگ حول محور x

$$V = \frac{\pi}{2} \bar{x} A$$

$$A = r^2 - \frac{\pi}{4} r^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2$$



$$\bar{x} = \frac{r^2(r + \frac{r}{2}) - \frac{\pi}{4} r^2(r + r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \pi/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})}{r^2 - \frac{\pi}{4} r^2} = \frac{\frac{3}{2} r^3 - \frac{\pi}{4} r^2(2r - \frac{4}{3\pi} r)}{r^2(1 - \frac{\pi}{4})}$$

$$\Rightarrow V = \left[\frac{3}{2} r^3 - \frac{\pi}{2} r^3 + \frac{1}{3} r^3 \right] \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} r^3 \left(\frac{11}{6} - \frac{\pi}{2} \right)$$

نمود: نیرو سازه ای هستند که درازای بارهای اعمالی محل خمش را دارند
نیروی بر روی شرایط مرزی متوجه قرار می گیرند و بارهای خارجی را تحمل می کنند



ساده (simple)

(استاتیکی معین)



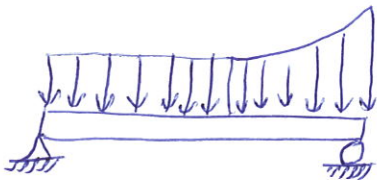
یک سر گیردار (Cantilever)

(استاتیکی معین)



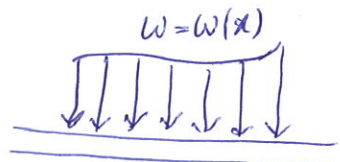
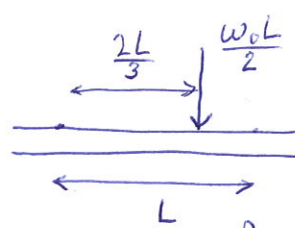
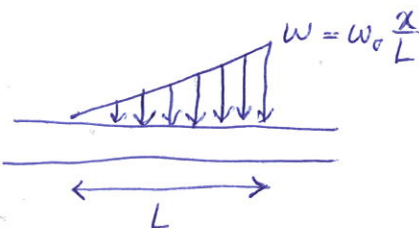
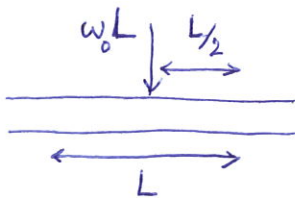
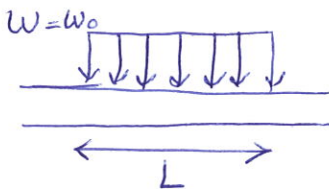
دو سر گیردار (Fixed)

(استاتیکی نامعین)



نیروی می تواند در معرض بارهای نمرده و یا بار متمرکز قرار گیرد
بارهای نمرده می تواند با شدت ثابت و یا متغیر باشد
شدت بار معمولاً بر حسب نیرو بر واحد طول است.

با توجه به آنچه در فصل پیش آموختیم می توان نیروی نمرده را با یک نیروی متمرکز در مرکز تحمل جایگزین کرد

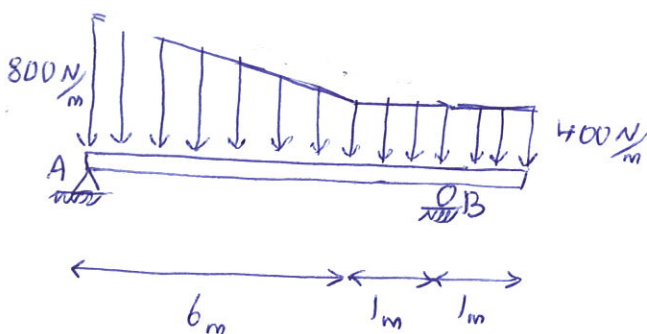


در حالت کلی اگر $w = w(x)$ داده شده باشد

نیروی خردی عبارت است از $w(x) dx$ و بنابراین کل نیروی حاصل از آن بار $\int w(x) dx$ است. برای آنکه بدانیم بار را کی متمرکز کنیم

$$\bar{x} R = \int x w(x) dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x w(x) dx}{\int w(x) dx}$$

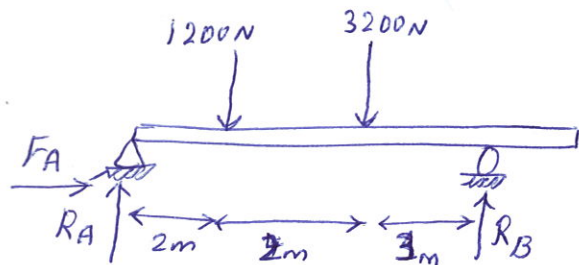
با سفید کردن نقطه ای



مثال: یکسایه اعلی علیه کاه را با سیر

بار $400 \frac{N}{m}$ گنجایش در کل نیرو؛ طول 8m وجود دارد
نیروی حاصل آن 3200 است که در وسط نیرو قرار می گیرد

برششی نیز دارای اندازه کلی $\frac{400 \times 6}{2} = 1200$ است که در فاصله 2m از چپ قرار می گیرد



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_A = 0$$

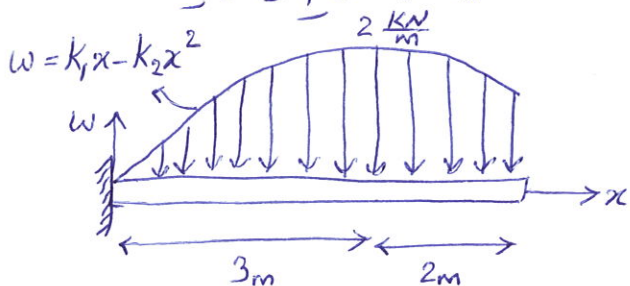
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1200 \times 2 + 3200 \times 7 - 7 R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 2171 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B + R_A - 1200 - 3200 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = 4400 - 2171 = 2229 \text{ N}$$

مثال: انعطاف A را در اثر نیروی ایمان شده باید. بارگذاری در فاصله 3m، بارکنش خود را داشته است.



$$\text{at } x=3: w = 2000 \Rightarrow 3K_1 - 9K_2 = 2000$$

$$\text{at } x=3: \frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow K_1 - 2K_2(3) = 0 \Rightarrow K_1 = 6K_2$$

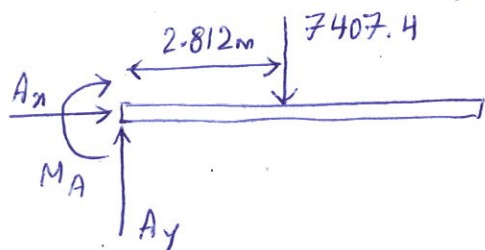
$$K_2 = \frac{2000}{9}, K_1 = \frac{12000}{9}$$

از حل معادله بالا

$$\Rightarrow w = \frac{1}{9} (12000x - 2000x^2)$$

$$R = \int_0^5 w dx = \int_0^5 \frac{1}{9} (12000x - 2000x^2) dx = \frac{12000 \times \frac{25}{2} - 2000 \times \frac{125}{3}}{9} = 7407.4$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^5 x w dx}{R} = \frac{\int_0^5 \frac{1}{9} (12000x^2 - 2000x^3) dx}{7407.4} = \frac{4000 \times 8 - 500 \times 5^4}{9 \times 7407.4} = 2.812 \text{ m}$$



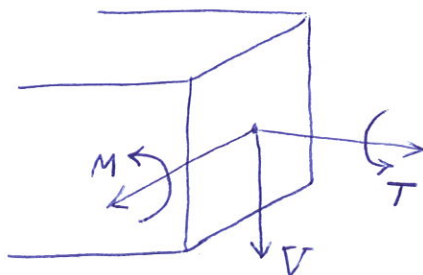
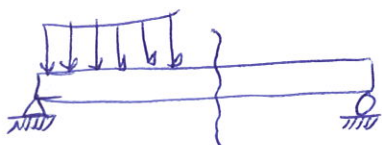
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 7407.4 \text{ N}$$

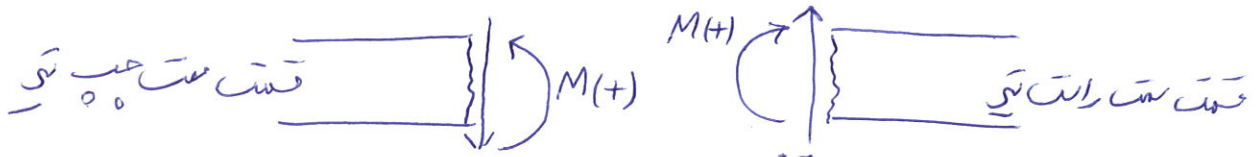
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = -2.812 \times 7407.4 \Rightarrow M_A = -20829 \text{ N.m}$$

نوع اثرات داخلی: در اثر بارگذاری ای ذکر شده در وقت قبل نبود و در درجه دوم وجودی است

نیروی علاوه بر تحمل کشش و فشرده شدن، چسب را عمل کنند



بنابر قرارداد جهت نیروی برشی V و گشتاور خمشی M ؛ صورت زیر تعیین می‌گردد

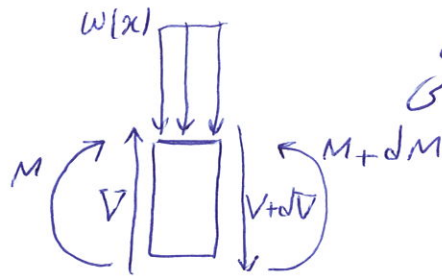
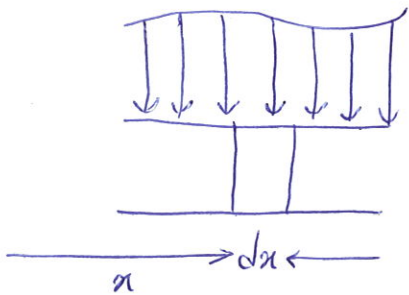


در این بخش هدف آن است که توزیع نیروی برشی و گشتاور خمشی را در طول تیر می‌سازیم

به معنی می‌باشد آمده دیان گرام نیروی برشی و دیان گرام عکس می‌کنیم

برای این کار باید در ابتدا تیر را به تکه‌های رایی می‌سازیم سپس با مقطع زدن تیر و نوشتن تیر برای مقطع خاص به راست نیروی برشی یا عکس را می‌سازیم کرد اصولاً با هر تغییر نیرو یا گشتاور در تکه‌ها باید مقطع جدیدی در

نظر گرفت.



رابطه بین بار و نیروی برشی و گشتاور خمشی

$$\sum F = 0 \Rightarrow w(x) dx + V + dV - V = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -w(x)$$

تیب مقدار دیان گرام نیروی برشی قرینه شدت بار گرفته است

$$\int_a^b dV = \int_a^b -w(x) dx \Rightarrow V(b) - V(a) = - \int_a^b w(x) dx$$

سطح زیر خمشی w با حسب x

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - (M + dM) + (V + dV) dx + w dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \Rightarrow -dM + V dx + dV \cdot dx + \frac{1}{2} w (dx)^2 = 0$$

با حفظ از جملات رسته بالا

$$\frac{dM}{dx} = V \Rightarrow$$

$$\int_a^b dM = \int_a^b V dx \Rightarrow M(b) - M(a) = \int_a^b V dx$$

سطح زیر خمشی V با حسب x

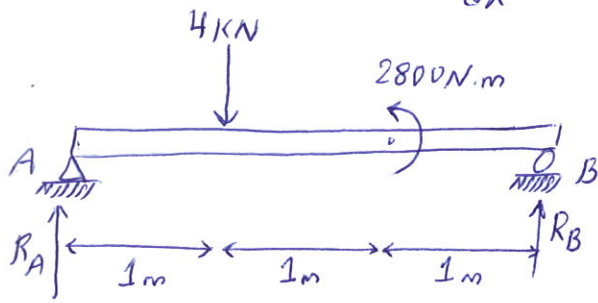
رابطه بالا نشان می‌دهد هر جا که V برابر صفر شود گشتاور به مقدار ماکزیمم می‌رسد و یا به صفر می‌رسد.

اگر در رابط با لا را ترکیب کنیم

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -w$$

مثال: مطلوبیت رسم دیاگرام نیروی برشی و عموان خمشی برای تیر رو بود

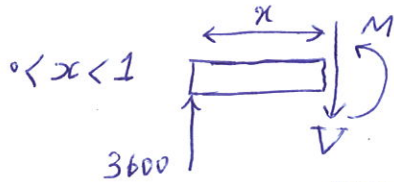
(حل)



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times 3 + 2800 - 4000 \times 1 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{1200}{3} = 400 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \times 3 - 2800 - 4000 \times 2 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{10800}{3} = 3600 \text{ N}$$



$$V - 3600 = 0 \Rightarrow V = 3600 \text{ N}$$

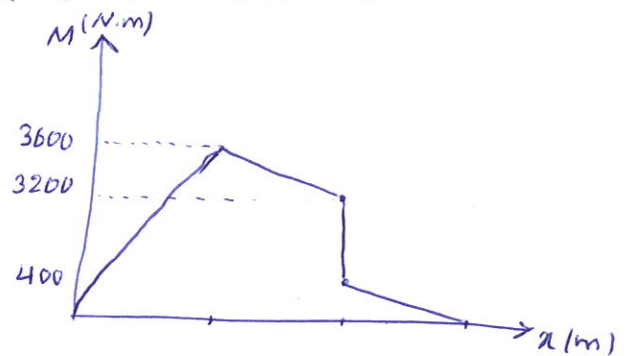
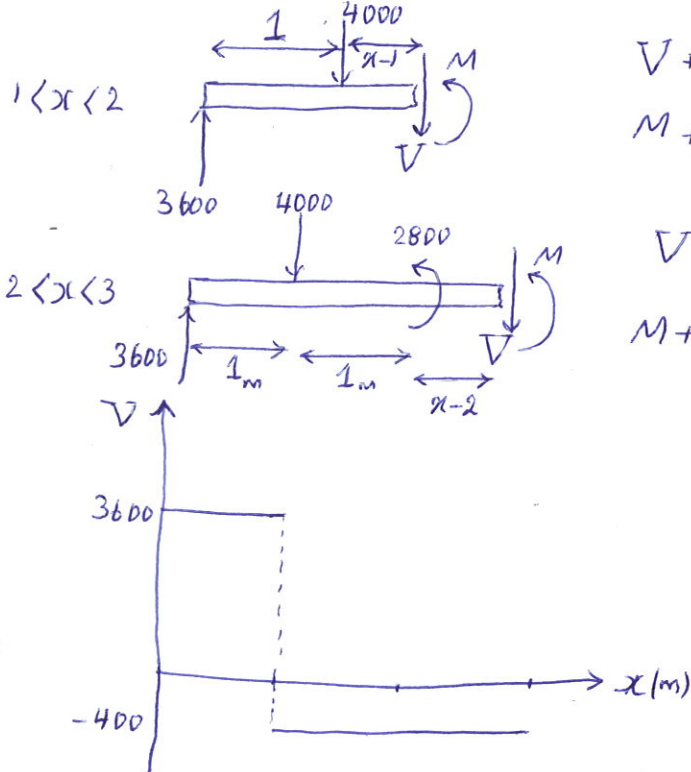
$$M - 3600x = 0 \Rightarrow M = 3600x \text{ N.m}$$

$$V + 4000 - 3600 = 0 \Rightarrow V = -400 \text{ N}$$

$$M + 4000(x-1) - 3600x = 0 \Rightarrow M = -400x + 4000$$

$$V + 4000 - 3600 = 0 \Rightarrow V = -400 \text{ N}$$

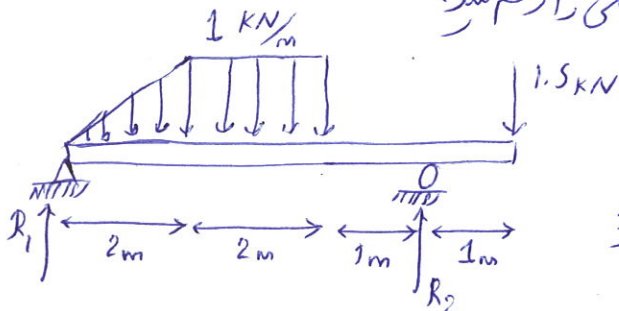
$$M + 4000(x-1) + 2800 - 3600x = 0 \Rightarrow M = -400x + 1200$$



$$V = -400 \text{ N}, M = 3400 \text{ N.m}$$

در وسط تیر داریم

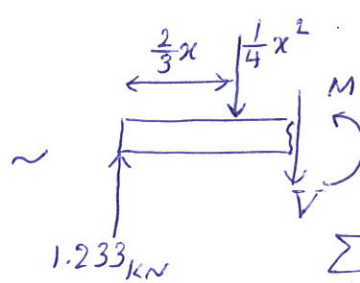
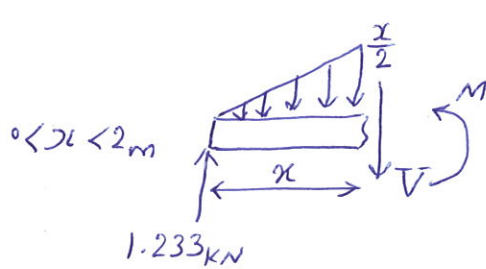
مثال: برای تیر نشان داده شده در شکل دیاگرام نیروی برشی و عموان خمشی را رسم کنید



نیروی ناشی از بار مستطیلی 2 kN است که در وسط قرار می گیرد
نیروی ناشی از بار مثلثی 1 kN است که در فاصله $\frac{4}{3}$ م قرار می گیرد

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1 \times \frac{4}{3} + 2 \times 3 - R_2 \times 5 + 1.5 \times 6 = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{9 + 6 + \frac{4}{3}}{5} = 3 + \frac{4}{15} = 3.267 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - 1.5 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow R_1 = 4.5 - 3.27 = 1.233 \text{ kN}$$

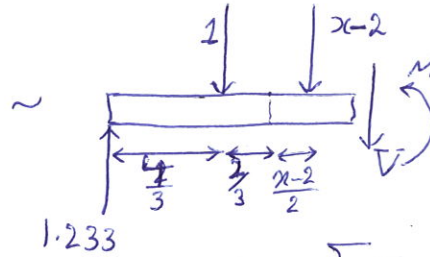
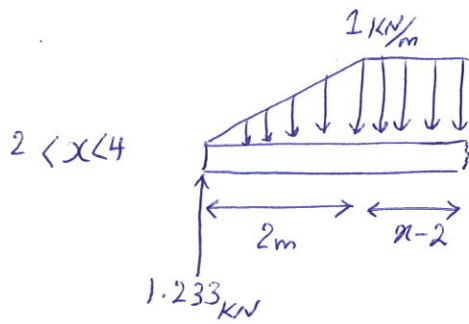


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + \frac{1}{4}x^2 - 1.233 = 0 \Rightarrow$$

$$V = 1.233 - \frac{1}{4}x^2$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + \frac{1}{4}x^2 \cdot \frac{1}{3}x - 1.233x = 0 \Rightarrow$$

$$M = 1.233x - \frac{1}{12}x^3$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + x - 2 + 1 - 1.233 = 0$$

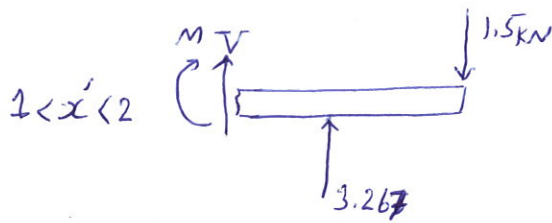
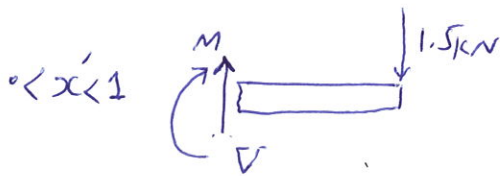
$$\Rightarrow V = 2.233 - x$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + (x-2)\left(\frac{x-2}{2}\right) + 1\left(x-2+\frac{2}{3}\right) -$$

$$1.233x = 0 \Rightarrow M = -0.5x^2 + 2.233x - 0.667$$

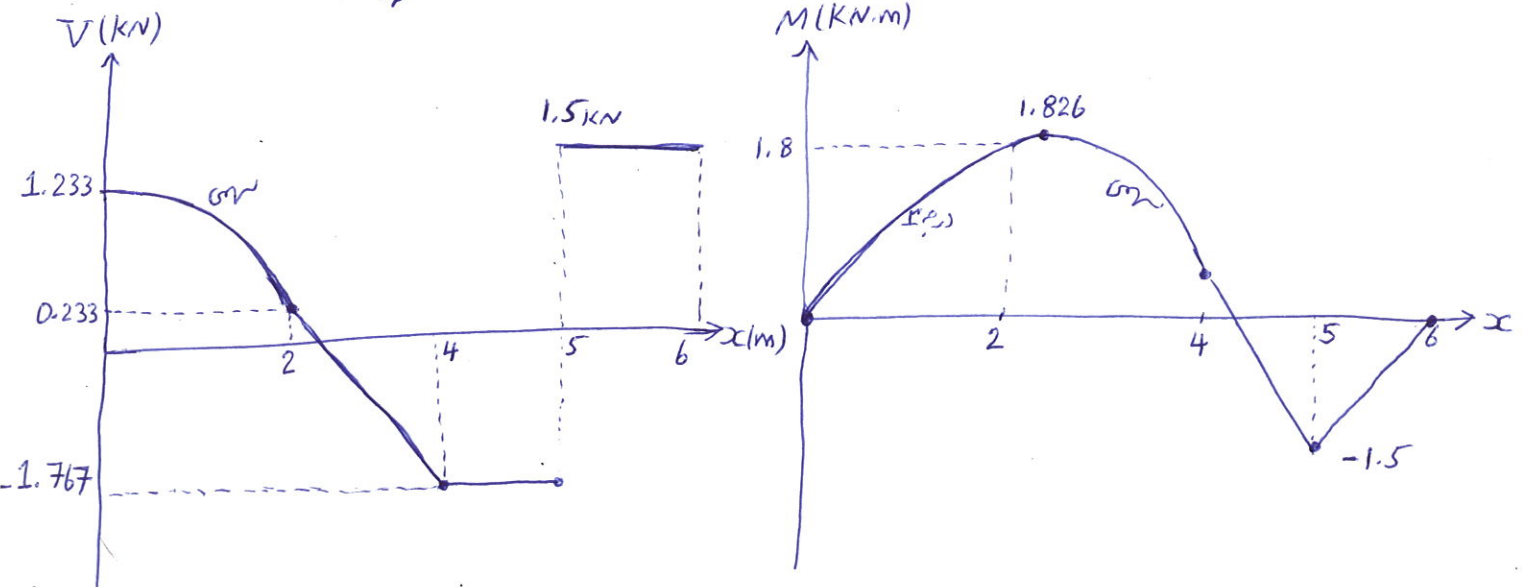
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V + 1.5 = 0 \Rightarrow V = +1.5\text{N}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + 1.5x' = 0 \Rightarrow M = -1.5x'$$



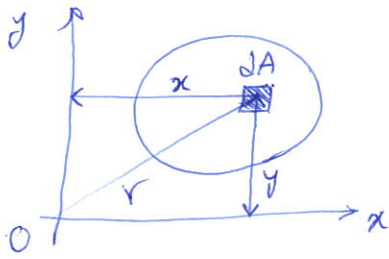
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + 3.267 - 1.5 = 0 \Rightarrow V = -1.767\text{N}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + 1.5x' - 3.267(x'-1) = 0 \Rightarrow M = 3.267 - 1.767x'$$



ممان انیرسی (ممان دوم سطح)

معمولاً با مساحت A را در نظر می‌گیریم در این صورت ρ یک عدد دوم سطح حول محور x و y ، صورت زیر تعریف می‌شود:



$$dI_x = y^2 dA \Rightarrow I_x = \int y^2 dA$$

$$dI_y = x^2 dA \Rightarrow I_y = \int x^2 dA$$

ممان انیرسی قطبی نیز برای سطح، صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dI_o = r^2 dA = (x^2 + y^2) dA \Rightarrow I_o = \int r^2 dA \Rightarrow$$

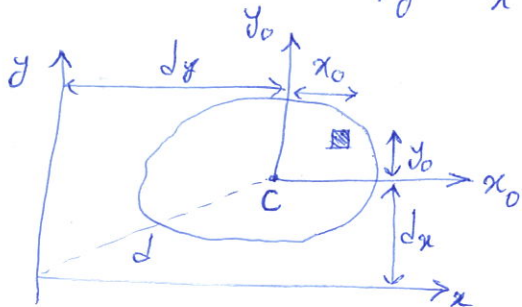
$$I_o = I_x + I_y$$

دقت کنیم که مقدار ممان انیرسی همواره مثبت است و بعد آن m^4 می‌باشد.

شعاع ژیراسیون: چنانچه برای یک ناحیه ممان انیرسی در دست باشد شعاع ژیراسیون، صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad K_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$$

$$K_o^2 = K_x^2 + K_y^2 \quad \text{ماتریس: رابطه} \quad I_o = I_x + I_y \quad \text{خواهیم داشت}$$



قصره محوری موازی:

این قصره انیرسی است که ثابت داشتن ممان انیرسی حول یک محور

می‌تواند همان انیرسی حول محور دیگر موازی با آن را می‌سازد.

$$I_x = \int (y_o + d_y)^2 dA = \int y_o^2 dA + \int 2d_y y_o dA + \int d_y^2 dA \Rightarrow$$

$$I_x = \int y_o^2 dA + 2d_y \int y_o dA + d_y^2 \int dA \Rightarrow \boxed{I_x = \bar{I}_x + A d_y^2}$$

به طریقی است؛ همان توان نوشت

$$I_y = \bar{I}_y + A d_x^2$$

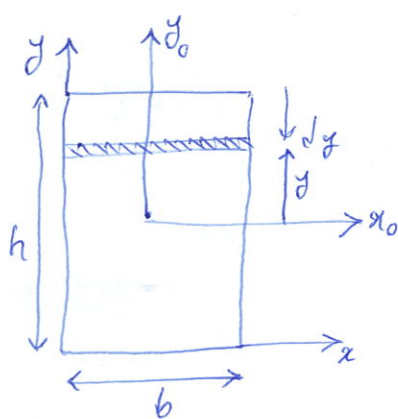
$$I_o = \bar{I}_o + A d^2$$

با دقت داشت که در رابطه بالا چنانکه از محور x باشد از مرکز سطح عبور کند در غیر این صورت رابطه بالا برقرار نیست.

چنانچه از مفهوم شعاع ژیراسیون استفاده کنیم

$$K_y^2 = \bar{K}_y^2 + d_x^2$$

$$K_x^2 = \bar{K}_x^2 + d_y^2$$



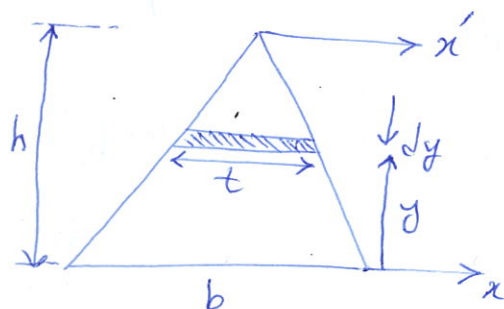
$$\bar{I}_x = \int y^2 dA = \int y^2 \cdot b dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b y^2 dy = b \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} b h^3 \Rightarrow \bar{K}_x = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} b h^3}{b h}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$\bar{I}_y = \int x^2 dA = \int x^2 \cdot h dx = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} h x^2 dx = h \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12} h b^3 \Rightarrow \bar{K}_y = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} h b^3}{b h}} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$I_0 = \bar{I}_x + \bar{I}_y = \frac{b h}{12} (b^2 + h^2)$$

$$I_x = \bar{I}_x + A d_x^2 \Rightarrow I_x = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} b h^3 \Rightarrow K_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$I_y = \bar{I}_y + A d_y^2 \Rightarrow I_y = \frac{1}{12} b^3 h + b h \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} h b^3 \Rightarrow K_y = \frac{b}{\sqrt{3}}$$



$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 \cdot t dy$$

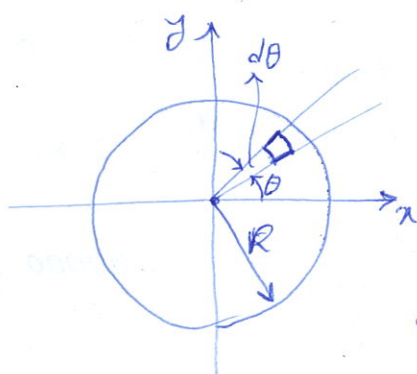
$$t = \frac{b}{h} (h - y) \quad \text{و} \quad \frac{t}{b} = \frac{h - y}{h}$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h} (h - y) dy = \frac{b}{h} \left[\frac{h}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^h =$$

$$\frac{b}{h} \cdot \frac{1}{12} h^4 = \frac{1}{12} b h^3 \Rightarrow K_x = \frac{h}{\sqrt{6}}$$

$$I_x = \bar{I} + A d^2 \Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{2} b h \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{18} b h^3 = \frac{1}{36} b h^3 \Rightarrow K_{\bar{x}} = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

$$I_{x'} = \bar{I} + A d^2 \Rightarrow I_{x'} = \frac{1}{36} b h^3 + \frac{1}{2} b h \left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} b h^3 + \frac{4}{18} b h^3 = \frac{1}{4} b h^3 \Rightarrow K_{x'} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$



$$I_0 = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr =$$

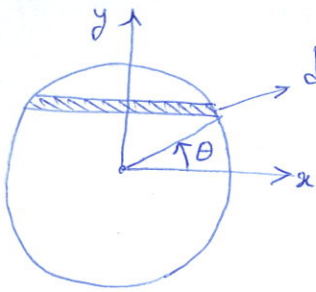
$$2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} \pi R^4 \Rightarrow K_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$I_x + I_y = I_0 \quad \text{و چون} \quad I_x = I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi R^4$$

$$I_x = \int y^2 dA = \iint (r \sin \theta)^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \Rightarrow$$

$$I_x = \frac{1}{4} R^4 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} R^4$$



$$dy = d(R \sin \theta) = R \cos \theta d\theta$$

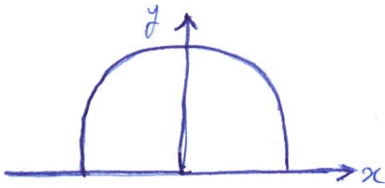
را حول محور آن است که

$$I_x = \int y^2 dA = \int (R \sin \theta)^2 \cdot 2 R \cos \theta \cdot R \cos \theta d\theta =$$

$$2R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = 2R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2} R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta$$

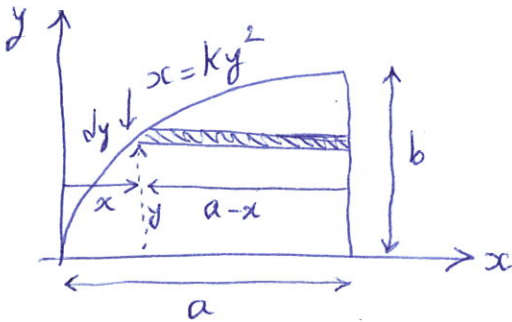
$$\Rightarrow I_x = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$I_y = \frac{\pi}{8} R^4 \quad \text{و همچنین} \quad I_x = \frac{\pi}{8} R^4$$



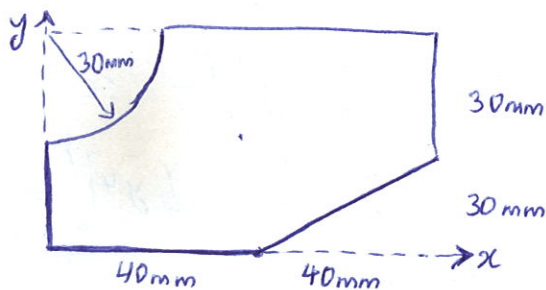
نشان دهنده است که برای یک نیم دایره

حول محور x



$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 (a - x) dy =$$

$$\int_0^b y^2 (a - ky^2) dy = \left[\frac{1}{3} ay^3 - \frac{1}{5} ky^5 \right]_0^b = \frac{1}{3} ab^3 - \frac{1}{5} kb^5 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) ab^3 = \frac{2}{15} ab^3$$



نشان دهنده است همان انیروی شکل در دور حول محور x

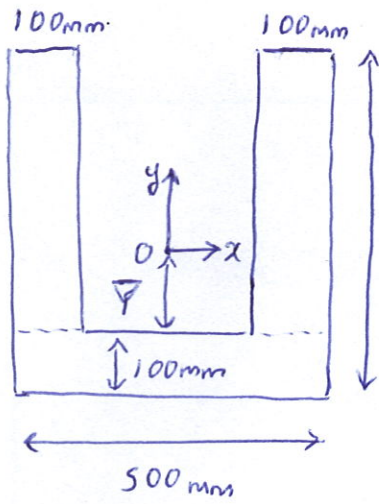
نمودار متقابل یک متقابل است که از آن یک نشان دهنده

ربع دایره کنده است. برای حرکت I را حول محور از مرکز جرم می گیریم و با تقسیم انتقال محور

Part	A	d_x	$A d_x^2$	$\bar{I}_x$ خود	I_x را بدین می آوریم
①	$80 \times 60 = 4800 \text{ mm}^2$	30 mm	4320000	$\frac{1}{12} \times 80 \times 60^3 = 1440000 \text{ mm}^4$	5760000
②	$-\frac{1}{4} \pi \times 30^2 = -706.85 \text{ mm}^2$	$60 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \times 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 47.27 \text{ mm}$	-1579423	$-\left[\frac{\pi}{16} \times 30^4 - \frac{\pi}{4} \times 30^2 \cdot \frac{16}{9\pi^2} \cdot 30^3 \right]$	-1623880
③	$-\frac{30 \times 40}{2} = -600 \text{ mm}^2$	10 mm	-60000	$-\frac{1}{36} \times 40 \times 30^3 = -30000$	-90000
$\Sigma A = 3493.15 \text{ mm}^2$					

$$I_x = 5.76 \times 10^6 - 1.62388 \times 10^6 - 0.09 \times 10^6 = 4.04612 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{4.04612 \times 10^6}{3493.15}} = 34.03 \text{ mm}$$



مثال) معلومیت همان انیالی مساحت نشان داده شده حول محورهای افقی و قائم:

که از مرکز سطح می گذرند. شعاع گریاسیون قطعی را باید بدید.

بدلیل تقارن نسبت به خط قائم فقط ارتفاع مرکز جرم را از رکن می سب

می کنیم

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{2 \times 250 \times 100 \times 500 + (-50) \times 100 \times 500}{2 \times 100 \times 500 + 100 \times 500} \Rightarrow$$

$$\bar{Y} = \frac{22500000}{150000} = 150 \text{ mm}$$

$$I_x = 2 \left[\frac{1}{12} \times 100 \times 500^3 + 100 \times 500 \times 100^2 \right] + \frac{1}{12} \times 500 \times 100^3 + 500 \times 100 \times 200^2 \Rightarrow$$

$$I_x = 30.8 \times 10^8 + 20.4 \times 10^8 = 51.2 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2 \left[\frac{1}{12} \times 500 \times 100^3 + 500 \times 100 \times 200^2 \right] + \frac{1}{12} \times 100 \times 500^3 + 500 \times 100 \times 0^2 \Rightarrow$$

$$I_y = 40.8 \times 10^8 + 10.4 \times 10^8 = 51.2 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_0 = I_x + I_y = 102.4 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}} = \sqrt{\frac{102.4 \times 10^8}{15 \times 10^4}} = \sqrt{68267} = 261.3 \text{ mm}$$

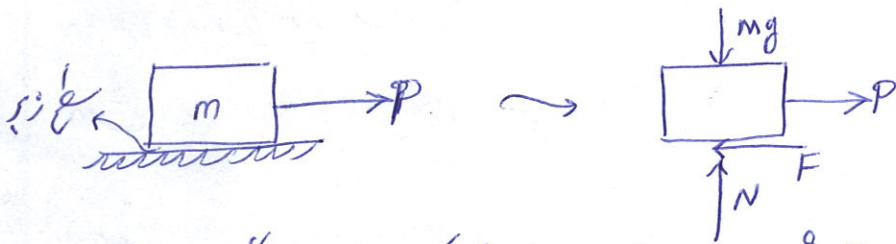
فصل ششم: اصطکاک

در طوری که smooth هستند و بین آنها تماس وجود دارد تنها سلفه نیروی قائم وجود دارد ولی اگر سطوح زبر باشند نیروی عمودی نیز وجود دارد. این نیروی تماس بر سطح را به دو اصطکاک می نامیم

انواع اصطکاک

- اصطکاک خشک (کولمب): تماس دو جسم جامد بر روی هم، همواره در خلاف جهت حرکت
- اصطکاک سیال: لایه ای غلیظ بین سیال با هم
- اصطکاک درونی: تفاوت یک جسم تنها در برابر نیروی

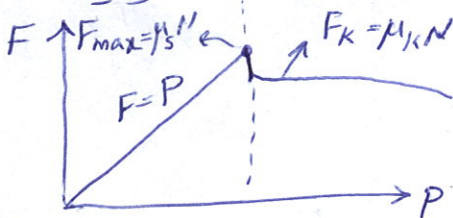
در این درس تنها هدف رسیدنی به اصطکاک خشک است که مثال بارز آن جسم قرار گرفته بر روی زمین است



آزادانی را توسط نیروی P را به مرور افزایش می دهیم و نیروی اصطکاک را اندازه می گیریم

زمانی که نیروی P برابر صفر است تقوا اصطکاک صفر است

هر چه مقدار P زیاد شود نیروی F با آن سادی خواهد بود چون

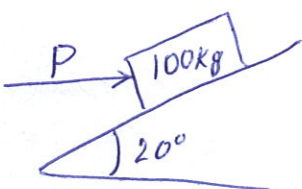


باید جسم ساکن باشد. اگر از ای مقدار خاصی از P لغزش شروع می شود که در استانه لغزش نیروی اصطکاک را $F_{max} = \mu_s N$ می نامیم و اگر از این اصطکاک ایستایی می نامیم در قبل از این نیروی اصطکاک همان P است.

زمانی که نیروی P بیش از F_{max} شود حرکت رخ می دهد و دیگر تعادل وجود ندارد در حرکت همواره نیروی اصطکاک $F_k = \mu_k N$ است مگر $\mu_k < \mu_s$ است. اگر از این اصطکاک خشکی می نامیم

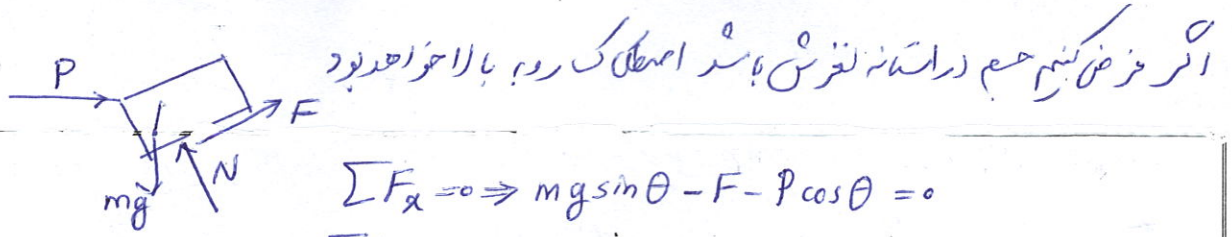
با افزایش نیروی P ضرب اصطکاک خشکی کاهش می یابد و این کاهش در سرعتهای بالا نیز چشم می آید.

مثال: مطلوب است با چه جهت و اندازه نیروی اصطکاک در مثال زیر اثر افقی $P = 500N$ و $P = 100N$



فرض کنید $\mu_s = 0.20$ و $\mu_k = 0.17$

حل: مشخص نیست که در ازای نیروی اعمالی جسم ساکن است یا در استانه حرکت



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow mg \sin \theta - F - P \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - P \sin \theta - mg \cos \theta = 0$$

حالت الف) $P = 500 \text{ N}$ با قرار دادن در معادله اول

$$F = 100 \times 9.81 \times \sin 20^\circ - 500 \times \cos 20^\circ = -134.3 \text{ N}$$

بنابراین جهت نیروی F استعجاب است و روبه پایین است از معادله دوم

$$N = 100 \times 9.81 \times \cos 20^\circ + 500 \times \sin 20^\circ = 1093 \text{ N} \Rightarrow F_{\max} = \mu_s N = 0.2 \times 1093 = 219 \text{ N}$$

از این بی که نیروی F کمتر از نیروی بالابست آمده است پس جسم در تعادل است مقدار نیروی اصطکاک 134.3 N روبه پایین است.

حالت ب) $P = 100 \text{ N}$ با قرار دادن در معادله اول

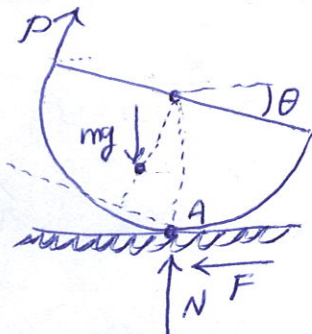
$$F = 100 \times 9.81 \times \sin 20^\circ - 100 \cos 20^\circ = 241.6 \text{ N}$$

$$N = 100 \times \sin 20^\circ + 100 \times 9.81 \cos 20^\circ = 956 \text{ N} \Rightarrow F_{s \max} = \mu_s N = 0.2 \times 956 = 191.2 \text{ N}$$

نیروی F از $F_{\max}$ بزرگتر شده است پس فرض تعادل استعجاب است بنابراین جسم حرکت می کند و نیروی اصطکاک $F = \mu_k N = 0.17 \times 956 = 162.5 \text{ N}$ روبه بالا است.

مثال) نیم استوانه ای مطابق شکل در معرض نیروی P که عمود بر سطح دایره است قرار دارد. نیروی P

از صفحه رفته رفته زیاد می شود تا در زاویه 40° لغزش رخ دهد ضریب اصطکاک و نیروی P را بیابید



$$F = \mu_s N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P \sin \theta - F = 0 \Rightarrow P \sin \theta = \mu_s N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P \cos \theta - mg + N = 0 \Rightarrow P \cos \theta - mg + N = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P(r + r \sin \theta) - mg \times \frac{4r}{3\pi} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow P \sin \theta = \mu_s (mg - P \cos \theta) \Rightarrow P = \frac{\mu_s}{\sin \theta + \mu_s \cos \theta} mg$$

$$P = \frac{\frac{4}{3\pi} \sin \theta}{1 + \sin \theta} mg$$

35

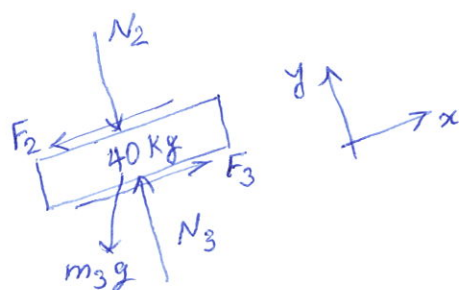
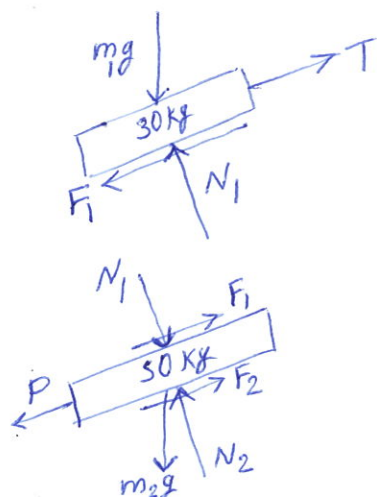
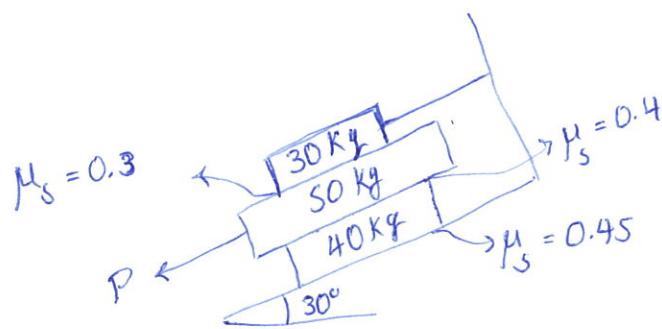
از برابر قرار دادن دو رابطه بالا:

$$\mu_s (1 + \sin \theta) = \frac{4}{3\pi} \sin^2 \theta + \frac{4}{3\pi} \mu_s \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \mu_s = \frac{\frac{4}{3\pi} \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta - \frac{4}{3\pi} \sin \theta \cos \theta} \Rightarrow \mu_s = 0.1223$$

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{4}{3\pi} \sin 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ} mg = 0.166 mg$$

مثال: سه بلوک مطابق شکل بر روی هم قرار گرفته اند وضعیت اصطکاک استاتیکی برای هر کدام داده شده است.
 حداکثر مقدار P در راستای لغزش و منع لغزش را بیابید.

ده نیروی آزاد هر عضو را رسم می کنیم



از تعادل در راستای y برای هر سه عضو

$$N_1 - m_1 g \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_1 = 30 \times 9.81 \times \cos 30^\circ = 255 \text{ N}$$

$$N_2 - N_1 - m_2 g \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_2 = 255 + 50 \times 9.81 \times \cos 30^\circ = 680 \text{ N}$$

$$N_3 - N_2 - m_3 g \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_3 = 680 + 40 \times 9.81 \times \cos 30^\circ = 1019 \text{ N}$$

فرض کنیم تنها بلوک 50 kg با لغزش برابر نیروی F_1 و F_2 به سمت راست

$$F_1 = \mu_s N_1 = 0.3 \times 255 = 76.5 \text{ N}$$

$$F_2 = \mu_s N_2 = 0.4 \times 680 = 272 \text{ N}$$

و از تعادل افقی عضو میانی

$$P - F_1 - F_2 - m_2 g \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow P = 76.5 + 272 + 50 \times 9.81 \times \sin 30^\circ = 1031 \text{ N}$$

$$F_2 + m_3 g \sin \theta - F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = 272 + 40 \times 9.81 \times \sin 30^\circ = 468 \text{ N}$$

حال ثابت بودن عضو 3 را چک می کنیم

ولی حداکثر مقدار F_3 برابر است با $\mu_s N_3$ و $0.45 \times 1019 = 459 \text{ N}$ پس فرض از ابتدا غلط است.

در وزن 40 kg لغزش کرده است. بنابراین $F_3 = F_{3\max} = 459 \text{ N}$ و از تعادل جسم میانی

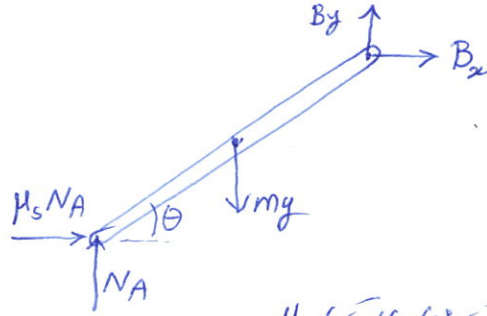
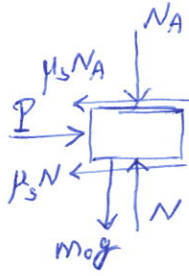
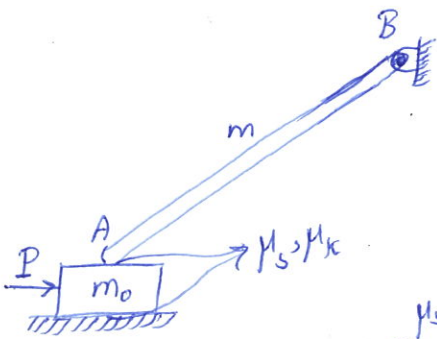
$$P + m_2 g \sin 30^\circ - F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow P = 76.5 + 263 - 50 \times 9.81 \times \sin 30^\circ = 93.8 \text{ N}$$

$$F_2 + m_3 g \sin 30^\circ - F_3 = 0 \Rightarrow F_2 = 459 \text{ N} - 40 \times 9.81 \times \sin 30^\circ = 263 \text{ N}$$

بنابراین دو جسم 50 kg و 40 kg روی هم می لغزند

مثال: مقدار P را چنان بیابید که جسم m_0 در آستانه قرار گیرد

$$m = m_0 = 3 \text{ kg} \quad \mu_s = 0.6, \mu_k = 0.5, \theta = 30^\circ$$



چون جسم در آستانه قرار دارد پس μ_s

انجام شود

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos \theta + \mu_s N_A L \sin \theta - N_A L \cos \theta = 0 \Rightarrow$$

$$N_A = \frac{\frac{1}{2} mg \cos \theta}{\mu_s \sin \theta - \cos \theta}$$

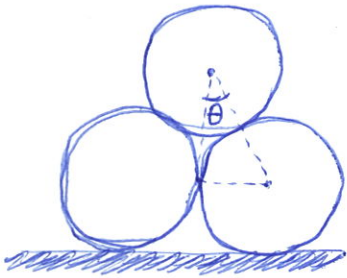
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - \mu_s N_A - \mu_s N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + mg - N = 0 \Rightarrow P = m_0 g + 2\mu_s N_A = mg \frac{\cos \theta}{\mu_s \sin \theta - \cos \theta} + m_0 g$$

با قرار دادن مقادیر عددی

$$P = 3 \times 9.81 \times \left(\frac{\cos 30^\circ}{0.6 \sin 30^\circ - \cos 30^\circ} + 1 \right) = 44.7 \text{ N}$$

مثال: سه گوی کاملاً یکسان مطابق شکل بر روی هم قرار گرفته اند ضریب اصطکاک ایستایی برای هر سه گوی یکسان است.



$$\sin \theta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



در اصل گوی را باید که لغزش ندهد

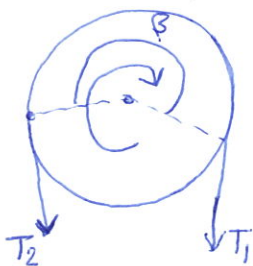
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow F_1 r - F_2 r = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_2 (r + \frac{r\sqrt{3}}{2}) - N_2 r \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = F_2 \frac{2+\sqrt{3}}{1} = (2+\sqrt{3}) F_2 = (2+\sqrt{3}) \mu_s N_2$$

$$\mu_s = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 0.268$$

و بنابراین



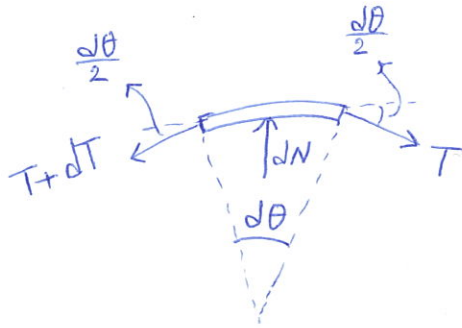
اصطکاک در کابل‌های انعطاف پذیر

یک پوی یا قرقره را در نظر می‌گیریم که مطابق شکل کشش دو طرفش T_1 و T_2 باشد

و جهت آن مطابق شکل است. در چنین شرایطی T_2 تیراز T_1 است

با در نظر گرفتن تست کوچکی از طناب

از تقابل افقی



$$(T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} - \mu dN = 0$$

از تقابل عمودی

$$(T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} + dT \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0$$

برای کوچک بودن زاویه $d\theta$: $\sin d\theta \sim d\theta$, $\cos d\theta \sim 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} dT = \mu dN \\ T d\theta = dN \end{cases} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \mu d\theta \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \mu d\theta \Rightarrow$$

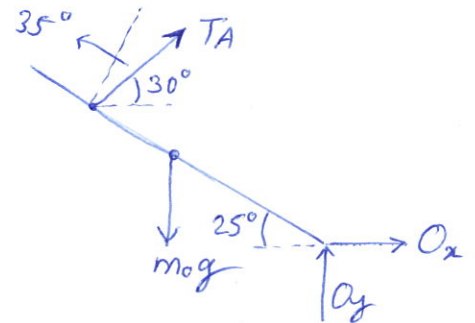
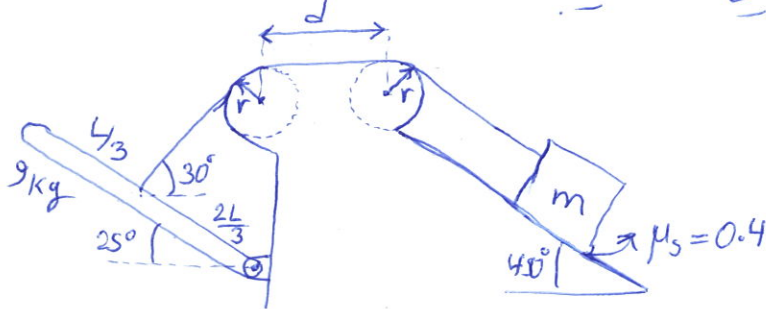
$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \theta \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 e^{\mu \theta}}$$

در رابطه بالا μ زاویه کلی میسر: در هر نقطه است و در جهت

را دیان باید باشد. اگر اصطکاک می خازند کش طناب دوست این است.

مثال: محذره جرم m را با یک سیستم در یک دایره ایستایی باشد. ضریب اصطکاک ایستایی 0.2 برای طناب و ضریب

محدوده برای جرم m در سطح 0.40 است.



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow m_0 g \cdot \frac{1}{2} \cos 25^\circ - T_A \cos 35^\circ \times \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$T_A = \frac{3}{4} m_0 g \frac{\cos 25^\circ}{\cos 35^\circ} = 73.3 \text{ N}$$

$$T_A = T_B e^{\mu \theta} \Rightarrow 73.3 = T_B e^{0.2(30+40) \frac{\pi}{180}} \Rightarrow T_B = \frac{73.3}{1.2767} = 57.4 \text{ N}$$

$$N - mg \cos 40^\circ = 0 \Rightarrow N = 0.766 \times 9.81 m = 7.515 m$$

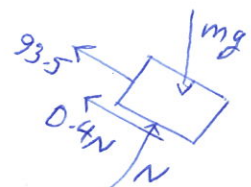
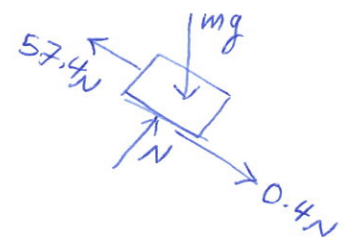
$$\sum F_y = 0: 0.4N - 57.4 + mg \sin 40^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\sum F_x = 0: 0.4 \times 7.515 m - 57.4 + 6.306 m = 0 \Rightarrow m = 6.164 \text{ kg}$$

$$T_B = T_A e^{\mu \theta} \Rightarrow T_B = 73.3 e^{0.2(30+40) \frac{\pi}{180}} = 73.3 \times 1.2767 = 93.5 \text{ N}$$

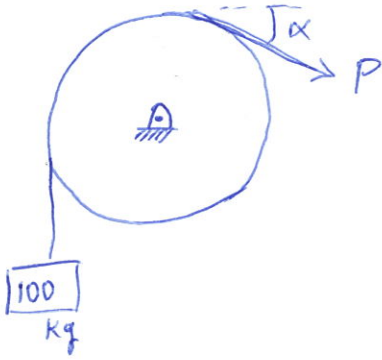
$$\sum F_y = 0: N - mg \cos 40^\circ = 0 \Rightarrow N = 0.766 \times 9.81 m = 7.515 m$$

$$\sum F_x = 0: 93.5 + 0.4 \times 7.515 m - m \times 9.81 \sin 40^\circ = 0 \Rightarrow m = 28.3 \text{ kg}$$



$$\Rightarrow 6.164 \text{ kg} \leq m \leq 28.3 \text{ kg} \quad (26)$$

نکته: برای $\alpha = 0$ نیروی P را به سمت چپ m در مقابل باشد و زاویه α در مقابل 0.3 است



حل: اگر جسم m رو به بالا حرکت کند

$$P = 100 \times 9.81 \times e^{\frac{\pi}{2} \times 0.3}$$

$$\Rightarrow P = 1572 \text{ N}$$

اگر جسم m رو به پایین حرکت کند

$$100 \times 9.81 = P \times e^{\frac{\pi}{2} \times 0.3} \Rightarrow P = \frac{981}{1.602} = 612 \text{ N}$$

ب) اگر نیروی P برابر 500 N باشد و زاویه α چقدر است تا قوس رخ نزاع

$$100 \times 9.81 = 500 e^{0.3\beta} \Rightarrow 0.3\beta = \ln \frac{981}{500} = 0.674 \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{0.674}{0.3} = 2.25 \text{ rad} = 2.25 \times \frac{360}{2\pi} = 128.7^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 38.7^\circ$$